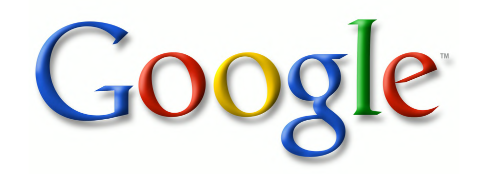
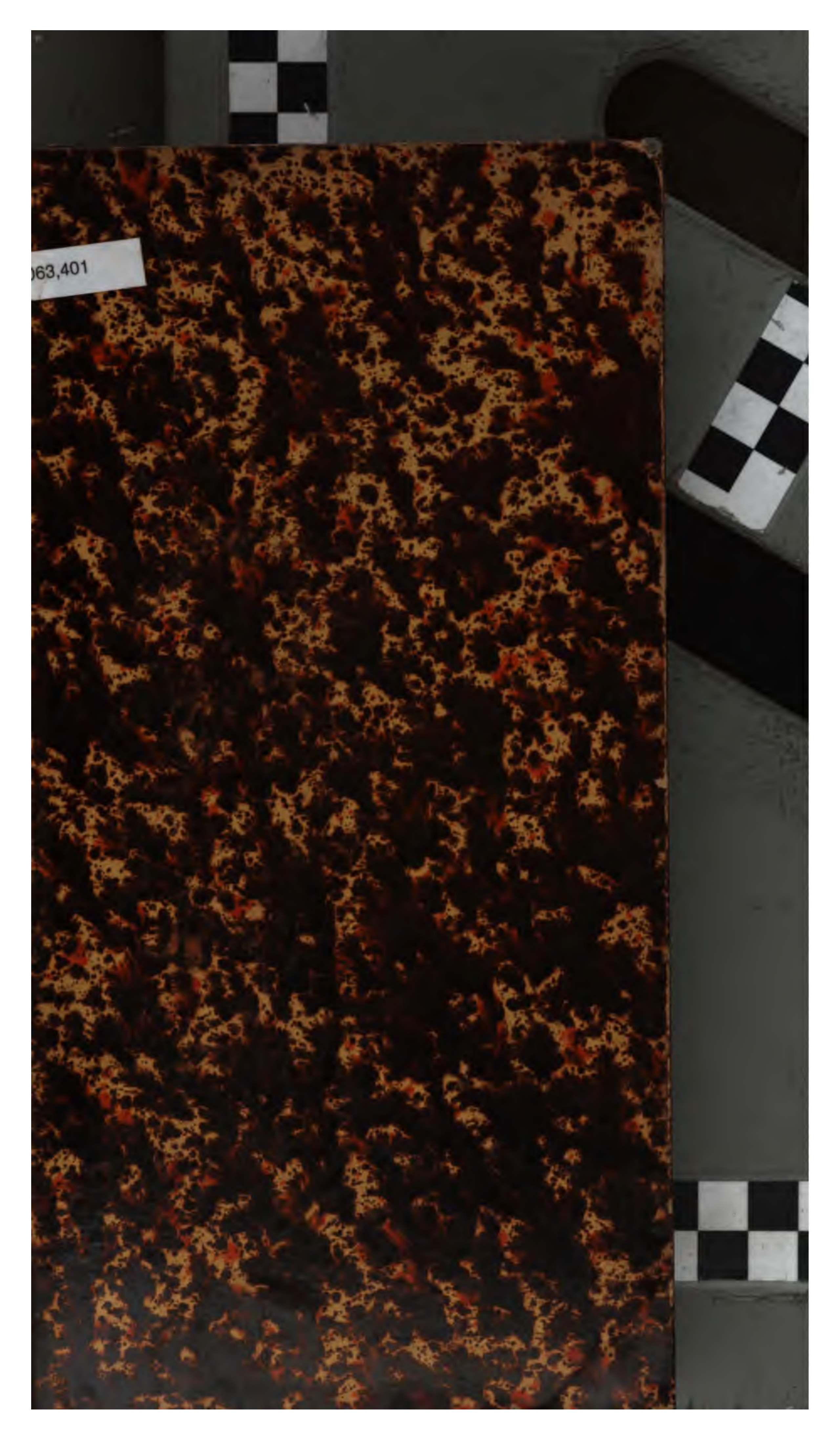
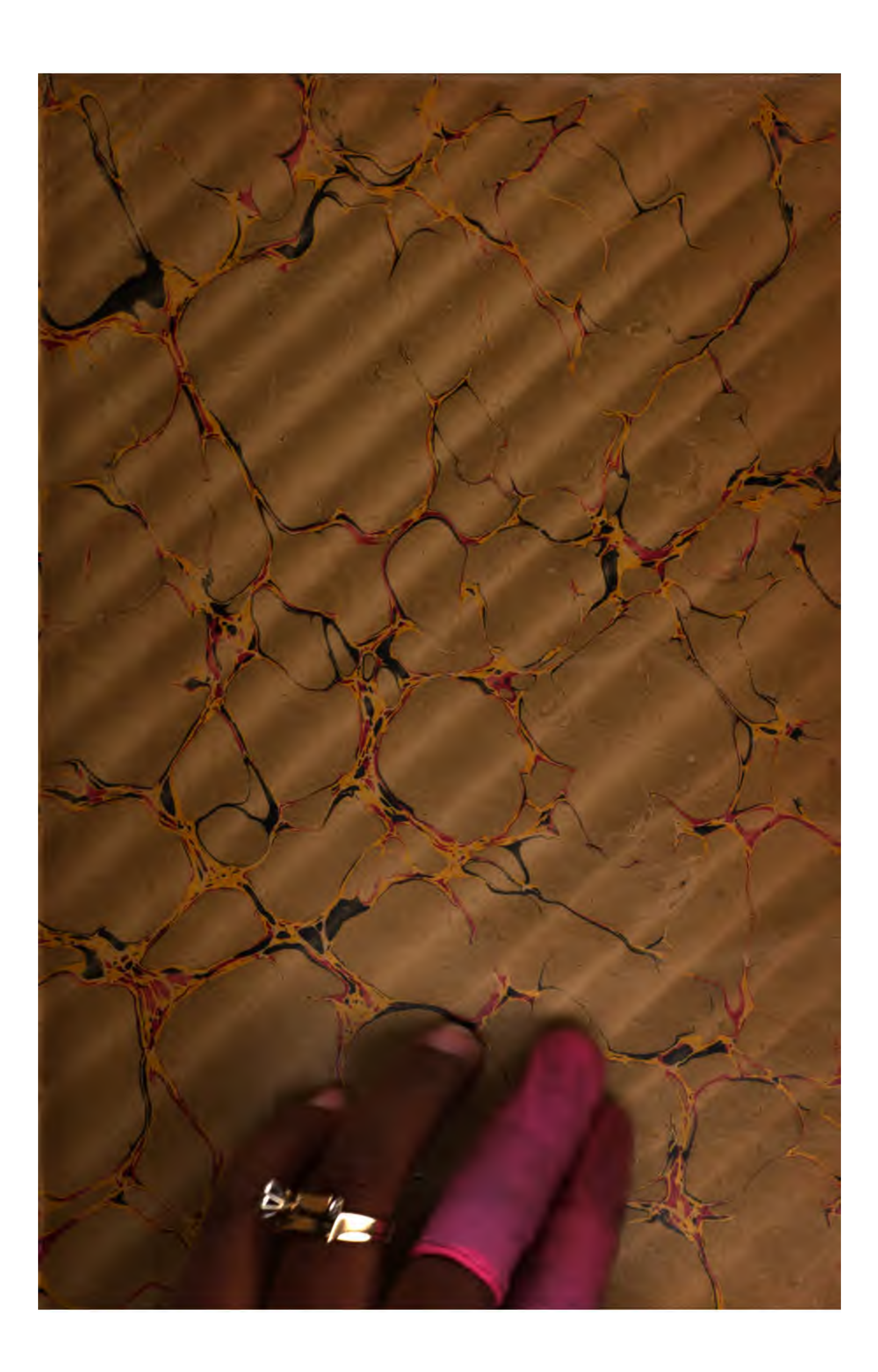



063,401


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

4e SÉRIE

TOME II

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ FERET ET FILS, LIBRAIRES
15, cours de l'Intendance, 15

1891


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MM. BRUNEL, professeur de calcul infinitésimal à la Faculté des Sciences.
CAGNIEUL, ancien préparateur à la Faculté des Sciences.
CARLES, agrégé à la Faculté de Médecine.
CARMIGNAC-DESCOMBES, ingénieur des Manufactures de l'État à Nantes.
CARON, professeur de Mathématiques au Lycée en retraite.
CHADU, professeur de Mathématiques au Lycée.
CHAVANNAZ, licencié ès sciences, étudiant en médecine.
CHENEVIER, chimiste au Chemin de fer du Midi.
CHEVASTELON, préparateur de Chimie à la Faculté des Sciences.
COLOT, licencié ès sciences, professeur de Mathématiques.
COUPERIE, président de la Société d'Agriculture.
CROIZIER, ✻, capitaine en retraite.
DELMAS, ✻, docteur en médecine, direct. de l'hydrothérapie des Hôpitaux.
DELMAS, ancien élève de l'École polytechnique.
DENIGÈS, professeur à la Faculté de Médecine.
DEVAUX, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
DOUBLET, aide-astronome à l'Observatoire.
DROGUET, ✻, directeur des postes et télégraphes, en retraite
DUBOURG, chimiste à la Douane.
DUPUY, professeur de Mathématiques au Lycée, en retraite.
DURÈGNE, sous-ingénieur au Télégraphe.
ELGOYHEN, élève à la Faculté des Sciences.
ELLIE, ingénieur civil.
FALLOT, professeur à la Faculté des Sciences.
FIGUIER, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
FOUGEROUX, percepteur des Contributions directes.
*FOURNET, ✻ A., ancien fabricant de produits chimiques.
GADEN, négociant.
GAULNE (DE), propriétaire.
*GAYON, ✻, professeur de Chimie à la Faculté des Sciences, chimiste en chef à la Douane.
GENDRON, électricien.
GLOTIN, négociant.
GOGUEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences.
GUESTIER (Daniel), négociant.
GUILLAUD, professeur à la Faculté de Médecine.
GYOUX, docteur en médecine.
HAUTREUX, ✻, lieutenant de vaisseau, directeur des mouvements du port en retraite.
ISSALY (l'abbé), licencié ès sciences mathématiques.
JOANNIS, professeur à la Faculté des Sciences.
JOLYET, professeur à la Faculté de Médecine.
JOUET, propriétaire.
KOWALSKI, professeur de Mathématiques.
KÜNSTLER, professeur adjoint à la Faculté des Sciences.
LABAT, ✻, ingénieur de constructions maritimes.
LABORDE, préparateur de la Station agronomique.

MM. LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.
LAGACHE, ingénieur des Arts et Manufactures.
LAGRANDVAL (DE), ✻, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
LAMEY, chimiste.
LANDE, ✻, agrégé à la Faculté de Médecine, médecin adjoint des hôpitaux.
LAVAL, professeur de Physique et de Chimie aux Écoles communales.
LAVERGNE (comte DE), ✻, propriétaire.
LE HOUCHU, professeur d'hydrographie.
*LESPIAULT, ✻, doyen de la Faculté des Sciences.
MERGET, ✻, professeur honoraire à la Faculté de Médecine.
MESTRE, pharmacien-chimiste.
MICÉ, ✻, recteur de l'Académie de Clermont.
MILLARDET, ✻, professeur de Botanique à la Faculté des Sciences.
MORISOT, professeur à la Faculté des Sciences.
PÉREZ, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
PETIT, docteur ès Sciences naturelles, chef des travaux de botanique à la Faculté des Sciences.
PICART, aide-astronome à l'Observatoire, chargé de cours à la Faculté des Sciences.
PIÉCHAUD, agrégé à la Faculté Médecine.
PIONCHON, professeur à la Faculté des Sciences.
PRAT, chimiste.
RAGAIN, licencié ès sciences, professeur de dessin graphique au Lycée.
RAYET (G.), ✻, professeur d'Astronomie physique à la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire de Bordeaux.
ROCH, chimiste.
RODIER, agrégé de l'Université.
ROUX, docteur en médecine.
ROZIER, professeur de Mathématiques.
SAUVAGEAU, professeur en congé, à Paris.
SOULÉ, ✻, officier supérieur du génie en retraite.
*TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
TURPAIN, licencié ès sciences, étudiant.
TRENQUELÉON (DE BATZ DE), professeur de Mathématiques au Lycée.
VERGELY, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
VIARD, professeur au Lycée.
VIAULT, professeur à la Faculté de Médecine.
VOLONTAT (DE), ✻, ingénieur des Ponts et Chaussées

Membres honoraires.

MM. BATTAGLINI (G.), professeur à l'Université de Rome, rédacteur du *Giornale di Matematiche*.
BONCOMPAGNI (le prince D. Balthazar), à Rome.
DARBOUX (G.), ✻, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

MM. DE TILLY, major d'Artillerie, directeur de l'arsenal d'Anvers.
FORTI (Angelo), ancien profess. de Mathématiques au Lycée Royal de Pise.
FRENET, ✻, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.
KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de l'Université impériale de Kazan (Russie).
LINDER, O. ✻, inspecteur général des Mines, à Paris.
RUBINI (R.), professeur à l'Université Royale de Naples.
WEYR (Em.), professeur à l'Université Impériale de Vienne.

Membres correspondants.

MM. ANDREEFF, professeur à l'Université de Kharkof.
ARDISSONE, professeur de Botanique à l'École Royale d'Agriculture de Milan.
ARIÈS, capitaine du Génie.
BJERKNES, professeur à l'Université de Christiania.
CURTZE (Max.), professeur au Gymnase de Thorn.
DYLLNER (G.), professeur à l'Université d'Upsal.
ÉLIE, professeur au collège d'Abbeville.
ERNST (A.), professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Caracas.
GARBIGLIETTI, docteur en médecine, à Turin.
GAUTHIER-VILLARS, O. ✻, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire éditeur, à Paris.
GOMES TEIXEIRA (F.), professeur à l'Université de Coimbre.
GRAINDORGE, professeur à l'École des Mines, à Liège.
GÜNTHER (Dr. Sig.) professeur au Gymnase d'Ansbach.
HAILLECOURT, inspecteur d'Académie en retraite, à Périgueux.
HAYDEN, géologue du Gouvernement des États-Unis.
IMCHENETSKY, membre de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg.
LAISANT, ✻, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.
MUELLER (baron Ferd. von), membre de la Société Royale de Londres, directeur du Jardin Botanique de Melbourne (Australie).
PEAUCELLIER, O. ✻, général du génie.
PICART, professeur de Botanique en retraite, à Marmande (Lot-et-Garonne).
PONSOT (Mme), propriétaire aux Annereaux, près Libourne.
ROIG Y TORRES (D. Rafael), naturaliste à Barcelone, directeur de la *Crónica Científica*.
ROUMEGUÈRE, naturaliste, à Toulouse, rédacteur de la *Revue Mycologique*.
ROUX, ✻, docteur en Médecine, à Paris.
TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (comte DE), à Milan.
WEYR (Éd.), professeur à l'Université de Prague.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ

ANNÉE 1890-91.

Présidence de M. AZAM.

Séance du 20 novembre 1890. — M. Hautreux présente à la Société une série de cartes extraites du *Pilot-Chart* et relatives à l'ouragan du 27 août 1890.

Il communique également quelques cartes relatives au trajet des bouteilles jetées en mer et retrouvées en différents points après des délais variant de cinq à cinq cent quatre-vingt-cinq jours.

— M. Brunel fait ensuite une communication sur le théorème fondamental de l'algèbre.

La démonstration que l'on a de cette proposition que toute équation algébrique entière du degré n a n racines ne laisse subsister aucun doute, et beaucoup d'entre elles défient toute critique. Il ne sera cependant pas inutile de voir comment on peut arriver à cette proposition par des considérations topologiques simples. Nous partons naturellement de l'équation algébrique entière à coefficients réels ou imaginaires

$$(1) \qquad F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots A_n = 0.$$

L'équation est par hypothèse du degré n, donc le coefficient des z^n est différent de zéro, on peut le prendre égal à l'unité.

Si l'on pose $z = x + iy$, $F(z)$ peut être séparé en deux parties :

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Le point x, y sera un point racine si l'on a séparément

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi(x, y) = 0.$$

Or, si dans l'équation (1) on pose

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

et si l'on divise par ρ^n, les équations des courbes (2) peuvent s'écrire

$$\text{Cos}\, n\theta + \frac{1}{\rho}(\ldots) = 0, \qquad \text{Sin}\, n\theta + \frac{1}{\rho}(\ldots) = 0,$$

et si l'on suppose que ρ augmente indéfiniment, nous en concluons que, sur un cercle de rayon très grand, les points de rencontre du cercle et de la courbe $\varphi(x, y) = 0$ sont voisins des points situés sur les n rayons donnés par $\cos n\theta = 0$, les points de rencontre du cercle et de la courbe $\psi(x, y) = 0$ sont voisins des points situés sur les n rayons donnés par $\sin n\theta = 0$; or, il est facile d'établir par des considérations purement topologiques que si deux courbes φ_1 et ψ_1, formées chacune d'un nombre quelconque de branches distinctes sont tracées sur une portion de plan limité par un simple contour, et si les points où φ_1 aboutit au contour étant en nombre égal à $2n$ alternent avec les points en même nombre où ψ aboutit au même contour, les courbes φ_1 et ψ_1 se rencontrent au moins en n points. Or, d'après ce qui a été dit précédemment en posant $F = \varphi + i\psi$, les courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ constituent sur la surface d'un cercle de rayon suffisamment grand un ensemble de deux courbes telles que les courbes φ_1 et ψ_1 et, par suite, l'équation $F(z) = 0$ a au moins n racines.

D'autre part, on sait qu'elle ne peut en avoir plus de n. Donc elle en a réellement n.

Séance du 4 décembre 1890. — La Société procède au renouvellement du Bureau pour l'année 1890-1891; sont élus :

Président........................	M. AZAM.
Vice-Président....................	M. GAYON.
Secrétaire général...............	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints..............	MM. CROIZIER ET PIONCHON.
Archiviste........................	M. BRUNEL.
Trésorier.........................	M. FOUGEROUX.

— MM. Rayet, Millardet, de Lagrandval et Pérez sont élus membres du Conseil d'administration qui se trouve ainsi constitué :

1re SÉRIE renouvelable en 1891.	2e SÉRIE renouvelable en 1892.	3e SÉRIE renouvelable en 1893.
MM. DUPUY.	MM. LESPIAULT.	MM. RAYET.
BOUCHARD.	MERGET.	MILLARDET.
MORISOT.	HAUTREUX.	DE LAGRANDVAL.
JOLYET.	BAYSSELLANCE.	PÉREZ.

— M. Joannis fait la communication suivante :

Sur une nouvelle méthode générale d'analyse chimique.

Lorsqu'on examine les divers procédés d'analyse en usage, on constate que la séparation des corps à doser repose sur des propriétés de solubilité ou de volatilité, ou bien encore sur l'attaque de certains corps par divers réactifs. (Ex. : action de l'hydrogène sur un mélange d'oxyde de zinc et d'oxyde de fer; ce dernier seul est réduit; Sainte-Claire-Deville.) Il y a lieu de se demander si l'on ne pourrait pas avantageusement employer d'autres propriétés. Il est évident, *a priori*, que pour qu'une propriété d'un corps puisse servir à le séparer d'un ou de plusieurs autres, il faut que cette propriété soit telle qu'elle puisse être constatée dans le mélange : ainsi, la densité d'un corps n'est pas une propriété de ce genre, parce que la densité d'un mélange de plusieurs corps est intermédiaire entre celles du corps le plus lourd et du corps le plus léger; de même pour la chaleur spécifique, la tension de vapeur, etc. Au contraire, la couleur que produit un sel dans une flamme peut être constatée dans un mélange, non pas à l'œil, mais en s'aidant du spectroscope qui donne les raies caractéristiques du sel considéré en même temps que celles des autres corps qui constituent le mélange. C'est sur cette précieuse propriété qu'est fondée l'analyse spectrale, qui a rendu de si grands services à l'analyse qualitative et à la recherche des métaux nouveaux.

La méthode générale d'analyse dont je vais entretenir la Société présente avec l'analyse spectrale un certain nombre de caractères communs : elle est fondée sur la tension de dissociation de systèmes non homogènes formés par des sels en combinaison avec des gaz. Parmi ces combinaisons, celles que l'ammoniac forme avec les sels, avec les chlorures métalliques en particulier, s'imposent tout naturellement et par suite de la généralité de leur formation. Considérons un mélange de chlorures métalliques à analyser : par exemple, un mélange de chlorures d'argent, de calcium, de zinc, de magnésium et de mercure. Je choisis ces métaux à dessein, parce que M. Isambert a donné les tensions de dissociation des composés formés par l'ammoniac avec ces chlorures.

Voici les températures auxquelles ces chlorures ammoniacaux ont une tension de dissociation égale à la pression atmosphérique (76 centimètres) :

COMPOSÉS.	TEMPÉRATURES.
$AgCl,3AzH^3$	20,8
$CaCl,4AzH^3$	32,5
$CaCl,2AzH^3$	42,2
$ZnCl,4AzH^3$	59,1
$2AgCl,3AzH^3$	67,6
$ZnCl,2AzH^3$	90,3
$MgCl,3AzH^3$	139,5
Hg^2Cl,AzH^3	187,5

On peut opérer de trois façons principales.

1re Méthode. — Le mélange des chlorures étant saturé de gaz ammoniac anhydre à basse température, ce gaz pouvant se dégager à travers du mercure dès que la pression dépasse un peu la pression atmosphérique, on élève peu à peu cette température; audessous de $+20°$, dans l'exemple choisi, l'ammoniaque qui sortira de l'appareil proviendra de la dilatation du gaz produite par l'élévation de température; puis, la température restant comprise entre $+20°$ et $+32°$, on observera un dégagement d'ammoniac qui proviendra: 1° de la décomposition du chlorure d'argent ammoniacal $AgCl,3AzH^3$ qui se décomposera complètement en ammoniac et en chlorure $2AgCl,3AzH^3$; 2° de la dilatation du gaz entre $+20°$ et $+32°$. Cette correction sera très facile à faire connaissant le volume de l'appareil, et elle sera toujours très petite. Si A désigne, exprimée en équivalent, la quantité de gaz ammoniac sorti, $\frac{A}{1,5}$ représentera, en équivalent, la quantité de chlorure d'argent, et $108 \times \frac{A}{1,5}$ représentera, en grammes, le poids de l'argent contenu dans le mélange. La quantité A peut être déterminée par la mesure du volume de gaz ammoniac sorti entre 20° et 32° ou en recevant ce gaz dans de l'eau que l'on neutralisera à l'aide d'un acide titré. Quand il ne se dégagera plus aucune bulle de gaz à 32°, on élèvera de nouveau la température et on la maintiendra un peu au-dessous de 42°; l'ammoniaque qui sortira alors proviendra de la décomposition de $CaCl,4AzH^3$ en ammoniac, et $CaCl,2AzH^3$. Si C désigne la quantité d'ammoniac sortie exprimée en équivalent et corrigée de la dilatation, $\frac{C}{2}$ représentera en équivalent le chlorure de calcium ou le calcium contenu dans le mélange, et $20 \times \frac{C}{2}$ sera, en grammes, le poids de ce calcium. On maintiendra ensuite la

température un peu au-dessous de 59°. Le chlorure $CaCl,2AzH^3$ se décomposera à son tour en ammoniac et chlorure CaCl. On devra trouver, après la correction de la dilatation, un nombre égal au précédent C. C'est là une vérification précieuse dans bien des cas; si on voulait la négliger, il suffirait, après avoir chauffé à 32°, d'élever la température non plus au voisinage de 42°, mais tout de suite au voisinage de 59°; C' désignant alors la quantité d'ammoniaque sortie, $\frac{C'}{4}$ représenterait en équivalent la quantité de chlorure de calcium, et $20 \times \frac{C'}{4}$, le poids en grammes du calcium dans le mélange. En chauffant ensuite entre 59° et 67°, la quantité d'ammoniac se dégageant proviendra de la décomposition de $ZnCl,4AzH^3$ en $ZnCl,2AzH^3$ et ammoniac. Si Z est la quantité d'ammoniac sortie entre ces températures, $\frac{Z}{2}$ sera la quantité de zinc en équivalents, et son poids en grammes sera $32,5 \times \frac{Z}{2}$. Entre 67° et 90° se produira la dissociation du composé $2AgCl,3AzH^3$, qui devra, comme vérification, donner la quantité A déjà trouvée d'ammoniaque. Puis, entre 90° et 139°, le chlorure de zinc $ZnCl,2AzH^3$ se dissociera en fournissant une nouvelle vérification; il devra se dégager Z d'ammoniac. Entre 139° et 187° se dissociera le composé $MgCl,3AzH^3$, ce qui donnera de la même façon la quantité de magnésium. Enfin, au-dessus de 187°, le corps $Mg2Cl,AzH^3$ se dissociera, ce qui permettra de trouver la quantité de mercure.

Cette nouvelle méthode paraît devoir être aussi sensible que les méthodes par poids : ainsi à un milligramme de chlorure de calcium correspond $1^{cc},5$ d'AzH^3, quantité très facile à mesurer avec une approximation d'au moins $0^{cc},1$.

2e *Méthode.* — On peut maintenir le tube contenant le mélange à température invariable et laisser se dégager le gaz ammoniac sous diverses pressions graduées de façon à décomposer successivement les divers composés.

3e *Méthode.* — On peut combiner ces deux méthodes, et c'est probablement le meilleur procédé. A une certaine température maintenue constante, on laissera les composés se dissocier successivement sous des pressions variées de plus en plus faibles, allant par exemple de 2 à 3 mètres de mercure jusqu'à la pression atmosphérique. A partir de ce moment, on élèvera la température jusqu'à un autre point, on maintiendra la nouvelle température

constante et on fera de nouveau dégager l'ammoniac sous des pressions décroissantes, et ainsi de suite.

L'expérience apprendra quelle est, de ces trois méthodes, celle qui est la plus pratique.

Les composés des chlorures et du gaz ammoniac sont les plus connus, mais on a décrit aussi des combinaisons de ce gaz avec des sulfates, des azotates, etc. Si l'on suppose qu'étant donné un métal, on ait construit pour tous ses sels susceptibles de se combiner avec l'ammoniac, les courbes représentant les tensions de dissociation à diverses températures, on aura une série de courbes qui définira le métal comme la série des raies d'un spectre caractérise le métal dans l'analyse spectrale; mais ici la tension permet non seulement de reconnaître, mais de doser le métal qui forme le sel et aussi l'acide qui s'y trouve.

Dans l'exemple que nous avons donné, et pour les métaux cités qui sont les seuls pour lesquels les nombres nécessaires ont été déterminés, on voit que l'écart des températures est très suffisant pour que pratiquement on puisse séparer la dissociation de ces divers composés. D'ailleurs, l'existence de composés multiples formés par un même chlorure permet, dans le cas où deux courbes appartenant à deux sels différents sont trop voisines pour être pratiquement séparées, d'arriver cependant au résultat. Ainsi la courbe de dissociation du composé $2AgI,AzH^3$ est très voisine de celle du composé $ZnCl,2AzH^3$. Si l'on avait à analyser un mélange d'iodure d'argent et de chlorure de zinc, on le saturerait d'ammoniac, ce qui donnerait $2AgI,AzH^3$ et $ZnCl,4AzH^3$. En les chauffant entre 59° et 85° environ, on décomposerait $ZnCl,4AzH^3$ en $ZnCl,2AzH^3$ et ammoniac qui permettront de calculer la quantité de zinc; puis, en chauffant au delà de 90°, $ZnCl,2AzH^3$ et $2AgI,AzH^3$ se décomposeraient en donnant, le premier autant d'ammoniac qu'il en avait déjà donné, c'est une quantité connue, et le second, une quantité qui sera connue par différence et qui permettra de calculer la quantité d'iodure d'argent.

APPLICATIONS. — 1° Analyse des mélanges de sels comme ceux qui viennent d'être cités.

2° Examen de la façon dont les bases et les acides sont combinés entre eux. Supposons par exemple que l'on fonde un mélange du sel AB et du sel A'B'. On peut se demander comment les acides A et A' se partageront les bases B et B'. La nouvelle méthode permet d'examiner ce cas. Il peut exister dans le mélange les quatre sels AB, A'B', A'B, AB'. On les combine à l'ammoniaque, et la

présence ou l'absence de chacun des sels est attestée par l'existence ou la non-existence de la tension de dissociation correspondante, et la quantité de chacun de ces sels peut être déterminée par la quantité d'ammoniac qui se dégage dans chacune des quatre dissociations auxquelles les sels donnent naissance.

Dans les analyses d'eaux minérales, après qu'on a dosé toutes les bases et tous les acides, on est très embarrassé pour représenter les résultats en unissant les bases avec les acides. Cette méthode d'analyse permettrait de lever cette difficulté.

3° Étude particulière de certaines réactions. Je citerai comme exemple le suivant : le sodammonium se décompose rapidement en présence du sel marin, en donnant un composé instable que l'on n'obtient facilement qu'en présence d'un excès de sel marin. Ce composé, qui a pour formule AzH^2Na^2Cl, se dédouble, par des lavages à l'ammoniac liquide, en AzH^2Na et NaCl. Comme le corps AzH^2Na^2Cl ne peut être séparé de l'excès de sodium ou de chlorure de sodium que l'on peut mettre que par des lavages à l'ammoniac liquide, et que ce corps décompose celui qu'on veut analyser, on se trouve en présence d'un mélange AzH^2Na^2Cl et de NaCl qu'il s'agit d'analyser pour savoir combien de chlorure de sodium est fixé sur l'amidure AzH^2Na. Pour cela, on met un excès d'ammoniac sur le mélange en opérant vers $-25°$. A cette température, le composé AzH^2Na^2Cl ne se combine pas à l'ammoniac, tandis que le chlorure de sodium forme le composé $NaCl,5AzH^3$. On laisse sortir l'ammoniac en excès en restant au-dessous de la température où ce composé a une tension de dissociation égale à la pression atmosphérique. Puis on recueille l'ammoniac qui sort à partir de cette température. Cette quantité d'ammoniac exprimée en équivalents et divisée par 5 donne le nombre d'équivalents de chlorure de sodium restés libres; comme l'on sait ce que l'on a mis de chlorure de sodium, on a par différence la quantité combinée à AzH^2Na.

On pourrait appliquer cette méthode d'analyse à bien d'autres cas du même genre : par exemple au cas de la préparation du bore et du silicium amorphe, pour étudier si ces métalloïdes sont à l'état de borure ou de siliciure alcalins avant que la masse ne soit traitée par l'eau.

4° Certains métaux ont des propriétés si voisines qu'il est très difficile de les séparer par les méthodes ordinaires. Le cobalt et le nickel, par exemple, ont sensiblement même équivalent et mêmes propriétés, et il est très possible que si les sels de ces deux métaux

étaient incolores, on ne les aurait pas distingués l'un de l'autre. Cependant, il résulte d'expériences rapides que j'ai faites, qu'il y a environ une vingtaine de degrés entre les températures où la tension de dissociation des composés ammoniacaux des chlorures atteint la pression atmosphérique. Il sera donc facile de les séparer par la nouvelle méthode. On peut se demander si certaines terres, comme la cerite, l'yttria, etc., qui paraissent contenir divers métaux, ne pourraient pas être examinées par la nouvelle méthode.

Si j'ai développé ainsi devant la Société ces diverses applications de la nouvelle méthode avant d'avoir essayé de voir si ces prévisions seraient vérifiées par l'expérience, c'est parce que l'étude que je me propose de faire nécessite une longue série d'expériences pour déterminer toutes les courbes de dissociation nécessaires, et que je désirais prendre date dès le début de mes recherches.

— M. Brunel montre que si l'on considère trois équations linéaires relativement aux coordonnées homogènes de la droite et qui définissent une surface du second degré, on peut appeler coordonnées de cette surface, ou coordonnées de l'hyperboloïde, les vingt déterminants du troisième ordre formés avec le tableau des coefficients. Il montre que ces vingt coordonnées satisfont à trente relations, mais qui ne sont pas indépendantes. Il établit que vingt de ces relations se déduisent des dix autres convenablement choisies.

— M. Hautreux signale, d'après les observateurs américains qui s'occupent des glaces, deux phénomènes physiques intéressants :

1° Le fait de la rupture spontanée des gigantesques icebergs provenant des montagnes de glace du Groënland, rupture qui se fait avec un bruit assourdissant quand ces blocs de glace sont entraînés par la dérive dans des eaux relativement chaudes;

2° Le fait que les filets des pêcheurs de phoques immergés à 25 mètres de profondeur gèlent souvent et remontent à la surface emprisonnés dans un bloc de glace, avec cette circonstance que le phénomène ne s'observe le plus souvent que quand le filet est muni d'une corde venant à la surface.

Séance du 18 décembre 1890. — M. Azam remercie la Société de l'avoir appelé au fauteuil de la présidence.

— M. Gayon fait une communication sur l'identification de la maladie des vins dits mildiousés et de la maladie des vins tournés :

Il est d'usage, dans le commerce bordelais, d'appeler *mildiousés* les vins qui se sont altérés dans ces dernières années, à la suite

des invasions du mildiou, comme s'il s'agissait d'une maladie nouvelle ayant pour cause immédiate et nécessaire le cryptogame.

C'est là une erreur, car les vins malades ont tous les caractères des vins *tournés*. On y trouve, en effet, les filaments parfaitement caractérisés de la tourne, maladie connue depuis longtemps et étudiée déjà par M. Pasteur. Et si, par le chauffage, on empêche le développement de ces filaments, le vin reste en même temps sain et normal, quelle qu'ait été l'intensité de l'invasion cryptogamique.

L'étude des acides volatils développés pendant l'altération du vin, aux dépens de l'acide tartrique, confirme pleinement ce qui précède; comme dans le vin tourné, ils sont en effet constitués par un mélange d'acide acétique et d'acide propionique, sans acide butyrique.

En voici deux exemples :

	Pauillac 1884.	Palus 1886.
Acide acétique par litre..........	1gr51	1gr29
Acide propionique par litre......	1 28	0 23
Total des acides volatils par litre.	2gr79	1gr52

— M. Gayon cite ensuite comme un fait remarquable qu'il ait pu rajeunir des levures alcooliques ayant vécu dans des vins de la Gironde depuis quarante-cinq ans. La plus grande longévité observée jusqu'ici pour des organismes de ce genre ayant vécu dans leurs liquides de culture était de vingt-cinq ans, sur des germes recueillis par M. Pasteur et rajeunis par M. Duclaux. M. Gayon se propose de chercher s'il pourra rajeunir des levures plus vieilles.

— M. Brunel communique un travail sur l'algèbre universelle :

Nous appelons *mathématique générale* la science des conclusions nécessaires. Pour raisonner, il faut des données; pour raisonner sûrement, il faut des données précises, univoques.

Les différentes branches des mathématiques se distinguent par la nature des données que l'on prend à leurs bases. Pour définir un domaine particulier de la mathématique générale, il faut définir l'ensemble des données, des caractères que l'on considère et les relations entre ces caractères, les lois auxquelles ils sont soumis. Le domaine ainsi défini peut avoir des applications nombreuses et différentes suivant l'interprétation physique que l'on attribue à ces caractères; il peut même n'avoir aucune application directe ou détournée. En tout cas, le mathématicien s'occupe de déduire, par le simple raisonnement, tout ce qui peut être tiré des données.

Dans l'algèbre, on représente par des symboles, d'une part les caractères, d'autre part les relations établies entre eux; on a ainsi deux sortes de symboles : les lettres et les signes.

Nous appelons *algèbre universelle* l'ensemble des algèbres différentes que l'on a étudiées ou que l'on peut étudier. Nous allons passer rapidement en revue les différentes algèbres particulières qui, aujourd'hui, constituent l'algèbre universelle, en donnant pour chacune d'elles l'exposé bibliographique de son développement historique.

M. Brunel fait alors l'historique rapide du développement des branches principales de l'algèbre universelle : Quantités négatives imaginaires, complexes, *ausdehnungslehre,* motrices, logique formelle, relations de parenté...

Séance du 8 janvier 1891. — M. Laborde, préparateur à la Station agronomique, est élu membre titulaire.

— M. Soulé fait une communication sur les systèmes d'équations du premier degré en nombre supérieur à trois.

M. Soulé a cherché à appliquer aux systèmes d'équations du premier degré en nombre supérieur à trois la règle empirique de Sarrus pour former les déterminants et trouver, par suite, la valeur des inconnues. Il a montré qu'en répétant les équations en nombre convenable au-dessous de leur tableau, on peut écrire immédiatement chacun des produits qui constituent le déterminant. Cette opération revient en effet à multiplier chacun des coefficients des inconnues dans une équation par chacun des termes du déterminant mineur qui lui correspond.

Les produits trouvés se classent d'abord suivant le nombre des inconnues, et chaque classe se divise en groupes répondant aux différents modes d'inscription que la règle indique pour les facteurs.

Le signe de chaque groupe s'obtient facilement par le sens des permutations circulaires des trois derniers indices, et pour les indices précédents, par la règle des signes des déterminants.

En cherchant les facteurs du produit qui demande le plus grand nombre de colonnes, on voit que, pour 2, 3, 4, 5, 6... inconnues, le nombre des colonnes est 2, 5, 10, 17, 26... Ce nombre s'exprime par la formule n^2+1, $n+1$ étant le nombre des inconnues.

Le nombre des produits du déterminant est égal au nombre des permutations des coefficients des p inconnues. En faisant $p=n+1$, on voit que, pour 2, 3, 4, 5, 6... inconnues, le nombre des produits sera..... 2, 6, 24, 120, 720... Il croît donc beaucoup plus vite que

le nombre des colonnes. Pour 10 inconnues par exemple, il y aurait 82 colonnes et plus de 3 millions de produits.

— M. Brunel fait ensuite une communication sur le nombre π. Si l'on se donne une circonférence de rayon égal à l'unité $x^2+y^2=1$, les coordonnées d'un quelconque de ses points peuvent s'exprimer par les relations $x=\cos s$, $y=\sin s$, s étant un paramètre variable auquel on peut attribuer des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point initial correspondant à la valeur s_0 du paramètre. Si l'on fait varier s à partir de s_0 jusqu'à une valeur s_0+l telle que les coordonnées du point final soient précisément celles du point initial, on appelle d'une façon générale l un périmètre de la circonférence. l est alors défini par les équations

$$\cos(s_0+l)=\cos s_0, \quad \sin(s_0+l)=\sin s_0,$$

d'où

(1) $$e^{i(s_0+l)}=e^{is_0}; \quad e^{il}-1=0;$$

l est naturellement indépendant du point de départ. En désignant par 2π la plus petite racine de l'équation (1), on sait que toutes les racines de cette équation sont comprises dans la formule $l=2k\pi$. De plus, avec la définition donnée du *périmètre*, il n'y a pas d'autres valeurs possibles de périmètre que celles formées par les racines de l'équation (1). Nous disons que l'équation (1) est une *équation de détermination complète*.

Il existe des équations de détermination incomplète admettant pour racines un nombre infini de racines de l'équation (1).

On rencontre déjà, en géométrie élémentaire, des déterminations incomplètes. La méthode des périmètres et celle des isopérimètres fournissent de tels exemples.

L'emploi des développements en séries, des fractions continues, des produits infinis donne également des déterminations incomplètes.

Mais il n'y a *a priori* rien d'impossible à ce qu'il existe des équations ayant pour racines des déterminations du périmètre de la circonférence de rayon égal à l'unité, et aussi des racines qui ne soient point de telles déterminations.

Considérons en particulier le cas des équations algébriques irréductibles. Une équation algébrique irréductible à coefficients entiers qui admet pour racine un périmètre de la circonférence de rayon égal à l'unité est telle que toutes les autres racines sont aussi des périmètres de la même circonférence.

En effet, si cela n'avait pas lieu, les autres racines, ou quelques-unes des autres racines seraient des périmètres de circonférences dont le rayon serait différent de l'unité.

Soient

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$$

les racines correspondant à des périmètres de la circonférence de rayon égal à l'unité;

$$\rho_{k+1}, \rho_{k+2}, \ldots, \rho_n$$

les autres racines. Considérons les rayons des circonférences correspondant à ces périmètres : ils sont respectivement égaux à

$$1, 1, \ldots, 1$$

pour le premier groupe, à des quantités $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_n$ différentes de l'unité pour le second groupe. L'équation dont on a supposé l'existence est supposée irréductible, et lorsqu'elle a été formée, rien ne distingue plus les racines les unes des autres; par suite, on ne distingue plus les rayons $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$ des rayons 1 correspondant aux premières racines. En d'autres termes, si nous nous donnons une longueur égale à l'unité, l'existence d'une équation irréductible que nous avons supposée conduirait à cette conséquence inadmissible que des quantités distinctes de l'unité se trouvent par là même définies. On ne peut, en effet, admettre que l'unité de longueur ne soit chose nettement et parfaitement déterminée. Donc, s'il existe une équation algébrique irréductible admettant pour racine le périmètre de la circonférence de rayon égal à l'unité, toutes ses racines sont des périmètres de la même circonférence.

Désignons par

$$\varepsilon, m_2\varepsilon, m_3\varepsilon, \ldots, m_n\varepsilon$$

les racines d'une équation algébrique irréductible $f(\varepsilon)=0$, pour laquelle $m_2, m_3, \ldots, m_4$ sont des quantités réelles et rationnelles. Si nous formons l'équation $f(m_2\varepsilon)=0$, dont les racines sont

$$m_2\varepsilon, m_2^2\varepsilon, m_2m_3\varepsilon, \ldots, m_2m_n\varepsilon;$$

cette équation ayant avec $f(\varepsilon)=0$ une racine en commun et étant de même degré possède toutes les racines de la première. Donc $m_2^2\varepsilon$ est racine de $f(\varepsilon)=0$. De même on verrait que $m_2^3\varepsilon, m_2^4\varepsilon, \ldots,$ sont racines de la même équation. Par suite, comme n est supposé fini, il y a une valeur de p telle que $m_2^p\varepsilon=\varepsilon$, $m_2^p=1$ et comme m_2

est réel, on a nécessairement $m_2=1$, ce que l'on ne peut admettre, car l'équation $f=0$ aurait une racine double, ou bien $m_2=-1$. Si l'équation f est de degré supérieur à deux, nous pouvons raisonner de même sur une autre racine. On trouverait de même que $m_3=1$, ce qui est inadmissible puisque f est irréductible, ou bien $m_3=-1$, et cette seconde hypothèse ne peut non plus être vérifiée, puisque déjà m_2 a été trouvé égal à -1. Donc il ne peut exister d'équation de degré supérieur au second dont les racines jouissent de la propriété d'être l'un des multiples rationnels de l'une d'entre elles. Dans le cas du second degré, notre raisonnement montre que l'équation doit être une équation binôme. Pour le premier degré, nous n'avons aucune conclusion.

De ce qui précède il résulte qu'un périmètre de la circonférence de rayon égal à l'unité ne peut satisfaire à une équation algébrique que si elle est du premier degré ou du second degré et de la forme binôme. Lambert et Hermite ont établi que π et π^2 étaient incommensurables.

Donc π est un nombre transcendant.

Séance du 22 janvier 1891. — M. Brunel présente à la Société le 3e volume de la *Vie de Sir W.-R. Hamilton,* publiée par R.-P. Graves, et attire particulièrement l'attention sur trois lettres où Hamilton communique à ses correspondants d'alors son impression sur un travail qu'il vient de recevoir. Ce travail lui était envoyé par Hoüel, et c'est à ce titre surtout qu'il intéresse la Société qui a tenu à honneur de publier dans ses *Mémoires* une notice sur l'influence scientifique de G.-J. Hoüel.

Ces lettres constituent, en ce qui concerne les travaux de Mécanique céleste et d'Astronomie, un appendice curieux à la quatrième partie de cette notice.

M. Brunel donne lecture d'une traduction de ces lettres.

1° *Lettre adressée à T.-R. Robinson; 24 mars 1856.*

« Un de ces jours derniers, j'ai reçu de Paris un in-quarto de 200 pages environ, presque entièrement consacré à l'application et au développement de mes résultats en astronomie physique. La première partie est relative aux résultats abstraits que j'ai établis en dynamique. La seconde, intitulée : *Thèse d'Astronomie. Application de la méthode de M. Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter* dues à Saturne, Uranus, Neptune, Mars, la Terre, etc., avec des inégalités de toutes sortes établies pour les années 2300 et 2800, le tout par le professeur ou M. Hoüel, d'Alençon, ayant été

soumis à l'examen de Cauchy, de Duhamel et de Delaunay et ayant reçu (à ce qu'il semble) leur approbation. Combien il est agréable de voir mes résultats abstraits transformés en centièmes de seconde! Quel sentiment l'on éprouve en lisant, en astronomie, de temps en temps, l'*ellipse de M. Hamilton*, ou mieux encore, çà et là, la lettre M supprimée, l'*Ellipse de Hamilton!* Et, en fait, c'est la vérité, bien que peut-être deux ou trois personnes dans ce pays aient été seules à le remarquer que j'ai assigné, il y a vingt ans, des orbites elliptiques pour *toutes* les planètes, essentiellement distinctes au point de vue théorique, quoique très peu différentes au point de vue pratique, de celles que Lagrange a si bien imaginées et qui ont sur ces dernières des avantages. »

2° *Lettre adressée à A. de Morgan; 11 juin 1856.*

Hamilton, après avoir dit à de Morgan qu'il regrette de ne point avoir trouvé dans la *History of Physical Astronomy*, de Grant, aucune notice de ses propres travaux sur la mécanique céleste, rappelle que ses recherches ont été jugées remarquables et dignes d'être poursuivies par des mathématiciens du plus grand mérite. Il rappelle à ce sujet les travaux de Jacobi, de Denkur, de Cayley, et arrive à ce qui nous intéresse ici plus particulièrement. « J'ai reçu, avec quelque retard, dans un lot de livres étrangers, un volume in-quarto de M Hoüel, d'Alençon, intitulé : « *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris*, pour obtenir le grade de docteur ès sciences (je copie en ce moment dans un cahier de notes écrit par un autre que moi, car j'ai prêté le livre lui-même au Conseil de l'Université). Des deux thèses contenues dans le volume, l'une est intitulée : Thèse de mécanique : *Sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de Mécanique*, et est presque entièrement consacrée à l'étude de mes mémoires et des extensions données par Jacobi à mes résultats; l'autre est une Thèse d'astronomie : *Application de la méthode de M. Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter*. Comme je n'ai point en ce moment le livre devant moi, je vous dirai simplement, de mémoire, que, après avoir corrigé un grand nombre d'erreurs de détail commises par Pontécoulant, l'auteur se propose d'appliquer ma nouvelle méthode et ma nouvelle fonction perturbatrice (H_2) à ma conception nouvelle des *orbites* elliptiques des planètes qui est entièrement distincte de celle que Lagrange a si bien imaginée. L'auteur a avec une grande élégance, et autant que je puis juger, car dans un point aussi important de la science je dois me réserver jusqu'à un examen plus attentif, appliqué avec succès mes prin-

cipes aux perturbations de Jupiter produites par toutes les autres planètes; il en a calculé les éléments pour les années 2300 et 2800 de notre ère. M. Grant ne pouvait pas connaître le livre de M. Hoüel puisqu'il fut publié plus tard que le sien, mais quelle différence *énorme* de sagacité scientifique dans l'appréciation des découvertes se rencontre dans les deux ouvrages! »

3° *Lettre adressée à Ingram; 24 août 1857.*

Hamilton, après avoir dit à propos de recherches de Salmon sur les quaternions que rien ne lui fait un plus grand plaisir que de voir les mathématiciens étendre ses recherches, s'exprime ainsi : « En ce qui concerne mes anciennes recherches d'Astronomie physique, à mon grand plaisir, c'est ce qui est arrivé. Jacobi, il y a longtemps déjà, me fit l'honneur de les commenter, et naturellement de les étudier. *Nil fere non tetigit; nil tetigit quod non ornavit.* Plus récemment, M. Hoüel, que le Comité de l'Association britannique a l'intention d'inviter à Dublin, a publié à Paris deux thèses (d'un bon nombre de pages in-quarto) pour obtenir le grade de docteur ès sciences, sur la Mécanique et l'Astronomie, relatives presque entièrement à ce qu'il se plaît à appeler mes découvertes. Dans un mémoire lithographié, daté de Caen, le 8 novembre 1856, et intitulé : *Note sur le Théorème d'Hamilton et de Jacobi, et sur son application à la théorie des perturbations planétaires,* Hoüel dit : « Mon but en rédigeant cette note a été de faire voir combien, de » toutes les méthodes qui ont été proposées pour arriver aux équa- » tions de la variation des constantes arbitraires, celle que Jacobi » a déduite des découvertes d'Hamilton est la plus directe et la » plus simple. »

— M. Brunel entretient ensuite la Société de l'extension aux espaces d'un nombre quelconque de dimensions des propriétés analogues à celles exprimées par le théorème de Meusnier dans l'espace à trois dimensions.

Considérons dans un espace à n dimensions une surface, c'est-à-dire un espace à deux dimensions

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour une courbe tracée sur cette surface on a d'une façon générale

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2$$

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} du_1^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} du_2^2 + \frac{\partial x}{\partial u_1} d^2u_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} d^2u_2$$

et on a pour expression du rayon de courbure, ou plutôt du carré de son inverse

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Sigma(dx_i d^2x_k - dx_k d^2x_i)^2}{(\Sigma dx^2)^3}.$$

D'autre part, le plan tangent à la surface est défini par les directions des tangentes aux courbes $u_2 = \text{const.}$, $u_1 = \text{const.}$ de la surface, c'est-à-dire qu'il est défini en direction par les quantités

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2}.$$

De même le plan osculateur à la courbe supposée tracée sur la surface est défini par les quantités

$$dx_i, \quad d^2x_i.$$

En général, deux plans forment dans l'espace à n dimensions deux angles, dans le cas présent l'un d'eux est nul, et l'autre est donné par la formule

$$\begin{aligned}\text{Cos}^2\theta\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2\right]&\left[\Sigma dx^2\Sigma(d^2x)^2 - \Sigma(dx d^2x)^2\right]\\ = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u_1}dx\Sigma\frac{\partial x}{\partial u_2}d^2x &- \Sigma\frac{\partial x}{\partial u_1}d^2x\Sigma\frac{\partial x}{\partial u_2}dx.\end{aligned}$$

Or, si l'on effectue les calculs en posant :

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \frac{\partial x_k}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x_i}{\partial u_2} & \frac{\partial x_k}{\partial u_2}\end{vmatrix} = p_{ik} \qquad \begin{vmatrix} dx_l & dx_m \\ d^2x_l & d^2x_m\end{vmatrix} = q_{lm},$$

on trouve tout d'abord que l'on a

$$\frac{\text{Sin}^2\theta}{k^2} = \frac{\Sigma(p_{ik}q_{lm} - p_{lm}q_{ik})}{\Sigma p^2(\Sigma dx^2)^3},$$

et si l'on pose de plus

$$d^2x = \delta^2x + \frac{\partial x}{\partial u_1}d^2u_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}d^2u_2,$$

les différentielles secondes disparaissent dans $\frac{\sin^2\theta}{k^2}$; cette expression ne dépend que de u_1, u_2 et $\frac{du_1}{du_2}$. C'est précisément là le théorème de Meusnier pour les surfaces tracées dans un espace quelconque.

M. Brunel montre alors comment se définissent les rayons de courbure en un point d'une surface située ainsi dans un espace quelconque, et, de plus, il établit que des procédés de calcul identiques s'appliquent à des espaces gauches d'un nombre quelconque de dimensions et conduisent à définir les différentes courbures en un point d'un tel espace.

— M. Hautreux présente la carte des glaces dans l'Atlantique Nord, en 1890.

Le mouvement glaciaire de 1890 a été plus étendu que d'habitude; il a été plus considérable que celui de 1887 qui était déjà remarquable à cet égard.

Il y a, d'un autre côté, une analogie singulière entre le climat de Bordeaux pendant ces deux années. De même qu'en 1887, l'année 1890 a été généralement sèche, et les maxima de pluie ont eu lieu dans les mêmes mois de janvier, mai, août et novembre. Les hivers qui ont suivi ont été froids et longs dans ces deux années.

Les deux années intermédiaires 1888 et 1889 montrent, à ce point de vue, des caractères très différents.

Le mouvement glaciaire n'a presque pas existé en 1888, et il ne s'est produit en 1889 que vers le milieu de l'année.

Pendant ces deux années, les pluies ont été plus considérables que la moyenne à Bordeaux et surtout depuis les mois de février jusqu'au mois d'août, c'est-à-dire pendant la période où le mouvement glaciaire habituel ne s'est pas produit.

Les hivers qui ont suivi ont été moins froids et moins longs que d'ordinaire, surtout celui de 1888-1889 qui suivait une année sans glaces.

Il n'y a que bien peu d'années que le mouvement glaciaire de l'Atlantique soit suivi avec attention, il n'est pas possible d'affirmer que les remarques précédentes ont le caractère d'une loi météorologique. On peut cependant comprendre l'influence que le mouvement glaciaire peut avoir sur le climat d'un point déterminé des côtes occidentales d'Europe, sur la Gironde par exemple.

Les pluies qui tombent sur notre département sont toutes de provenance océanienne. Les dépressions ou les orages qui les amènent viennent de l'Atlantique, et souvent de fort loin.

On peut estimer que parmi les dépressions qui atteignent nos côtes, la moitié est originaire d'Amérique, si ce n'est du Pacifique et a passé près des bancs de Terre-Neuve.

Ces cyclones mettent à peu près deux jours pour franchir les

900 milles de surface océanique couverts par les glaces; dans ce contact, leurs vents chauds et humides se refroidissent; les vapeurs d'eau se condensent et, lorsqu'ils atteignent nos côtes, ils ne versent plus les quantités d'eau qu'ils pourraient apporter s'ils n'avaient été condensés par les glaces.

Quant aux conséquences hivernales des différents états glaciaires, ce n'est pas dans des modifications thermales de la surface de l'Atlantique près de nos côtes qu'on peut les trouver. Les températures mensuelles présentent, en effet, une fixité remarquable depuis le méridien des Açores jusqu'au golfe de Gascogne. On ne peut que constater le fait sans en déterminer les causes.

Nous présentons les tableaux des pluies et gelées à Bordeaux pendant les quatre années examinées.

Pluies à Bordeaux en millimètres.

	1887	1888	1889	1890		1887	1888	1889	1890
Janvier	85	16	58	92	Totaux partiels	233^{mm}	479^{mm}	497^{mm}	273^{mm}
Février	9	50	59	25					
Mars	23	108	68	20					
Avril	43	77	91	50					
Mai	69	75	87	106					
Juin	31	65	108	25					
Juillet	58	104	24	38					
Août	87	75	25	71					
Septembre	46	21	15	48					
Octobre	55	42	224	32					
Novembre	169	90	48	100					
Décembre	88	58	49	26					
Totaux	763^{mm}	781^{mm}	856^{mm}	642^{mm}					
Jours de pluie	187 j.	213 j.	217 j.	187 j.					
Jours de gelée		61	34	53					

Manifestations orageuses en France.

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septemb.	Octobre	Novemb.	Décemb.	Total
1887	»	»	»	»	11	15	18	»	»	»	»	»	44
1888	»	»	3	4	7	14	12	»	8	3	14	»	65
1889	»	»	»	9	19	28	17	15	5	5	»	»	98
1890	»	»	3	9	16	6	1	5	5	»	»	»	45

En résumé :

Les années glaciaires sur l'Atlantique semblent produire, en Gironde, un climat sec, surtout au printemps, un hiver froid, prolongé et un petit nombre d'orages en été.

Les coups de vent sont nombreux sur les côtes d'Amérique.

Les années sans glaces produiraient au contraire, en Gironde : un climat humide au printemps; un hiver doux et court; de nombreux orages en été.

Les coups de vent sont moins nombreux sur les côtes d'Amérique.

Séance du 5 février 1890. — M. AIGNAN, professeur au lycée de Mont-de-Marsan, et M. GOGUEL, chargé de conférences de minéralogie à la Faculté des sciences de Bordeaux, sont nommés membres titulaires.

— MM. GAYON et DUBOURG font connaître à la Société des expériences desquelles il résulte que le plâtrage de la vendange a pour effet de laisser dans le vin, non du *bisulfate de potasse* comme on l'a dit quelquefois, mais bien du *sulfate neutre de potasse;* comme l'ont établi tout récemment MM. Roos et Thomas.

La démonstration se fait à l'aide du chlorure de sodium. Si l'on concentre un volume donné de vin plâtré, additionné préalablement d'une quantité donnée de chlorure de sodium, et si l'on calcine légèrement le résidu, on retrouve tout le sel ajouté, exactement comme si le vin avait été additionné directement de sulfate neutre de potasse, tandis qu'avec les vins additionnés de bisulfate de potasse ou d'acide sulfurique, on constate une déperdition notable de chlorure.

En appliquant la méthode à des vins mutés au soufre, dans lesquels on trouve des doses souvent élevées d'acide sulfurique, on démontre que cet acide n'est pas tout entier combiné sous forme de sulfate neutre de potasse, mais qu'il existe en grande partie à l'état de liberté.

MM. Gayon et Dubourg indiquent ensuite que les levures alcooliques, dans les vins, ne sont pas toujours tuées à la température de 60°, c'est-à-dire à la température à laquelle on pasteurise d'ordinaire ces liquides. En faisant varier la composition du vin et la pression, ils ont observé que des levures peuvent rester vivantes à 65 et même à 70°.

— M. LABORDE appelle l'attention de la Société sur l'analyse des dissolutions du sulfure de carbone dans l'eau employées dans le traitement des vignes phylloxérées.

Jusqu'à ces derniers temps les chimistes qui avaient fait des analyses de ce genre, n'avaient pu retrouver qu'une faible quantité du sulfure introduit dans l'eau par les appareils industriels servant à faire la dissolution.

En employant des méthodes qu'il a indiquées et qui évitent des causes d'erreur qui avaient été jusqu'alors méconnues, M. Laborde a montré qu'on pouvait arriver à doser exactement le sulfure de carbone dissous dans l'eau.

— M. Prat offre à la Société de se réunir dans son laboratoire pour assister à des expériences relatives à l'isolement du fluor.

Séance du 19 février 1891. — Il est procédé à la nomination de deux Commissions chargées, conformément aux statuts, l'une de vérifier l'état des finances, l'autre de vérifier l'état des archives.

MM. Blarez, le Houchu et Soulé sont désignés pour faire partie de la première;

MM. Morisot, de Lagrandval et Rayet pour faire partie de la seconde.

— MM. Gayon et Dubourg font connaître les résultats de l'action de températures croissantes, de degré en degré, depuis 55 jusqu'à 60 degrés, sur le ferment des vins tournés.

Dans un liquide titrant 8° d'alcool et renfermant 3 grammes d'acidité par litre, une température de 60 degrés maintenue seulement pendant 1/4 de minute suffit pour tuer tous les germes de ferment; la stérilisation peut aussi être obtenue à 59° et aux températures inférieures, si l'action de la chaleur est prolongée un temps suffisant, d'autant plus long que la température est plus basse.

Le chauffage du ferment en tubes ouverts est plus efficace, toutes choses égales d'ailleurs, que le chauffage en tubes fermés.

— M. Brunel fait une communication sur les algèbres linéaires non associatives où il montre l'existence de systèmes normaux d'unités fondamentales; pour une portion de ces unités ε, $\varepsilon^2=1$; pour les autres $\varepsilon^2=0$.

— M. Chenevier indique un procédé de purification du sulfure de carbone sans distillation.

Le sulfure de carbone peut être facilement purifié et débarrassé de l'odeur infecte qu'il possède presque toujours, même quand on a affaire à du sulfure de carbone pur du commerce, à l'aide du procédé suivant.

On ajoute au sulfure à purifier un léger excès de brome, de

manière qu'il garde une teinte rouge persistante ($0^{cc},5$ de brome par litre suffisent et au delà dans la plupart des cas). On laisse en contact 3 à 4 heures, ou plus, si c'est possible. On enlève alors le brome par une des méthodes suivantes :

1° Par la soude caustique. — En agitant quelques instants le sulfure de carbone bromé avec un léger excès de lessive des savonniers, il se trouve entièrement débarrassé de brome. On décante la lessive alcaline et on lave au besoin une ou deux fois à l'eau distillée.

2° Par le cuivre métallique. — On met en contact le sulfure de carbone bromé avec du cuivre en tournure ou en limaille; au bout d'une heure ou deux le sulfure de carbone est entièrement décoloré, on n'a plus qu'à le décanter ou le filtrer sur papier.

Si, après ces opérations, le sulfure restait trouble, parce qu'il aurait entraîné de l'eau, il suffirait de le mettre en contact avec un peu de chlorure de calcium sec et de filtrer.

On obtient ainsi sans distillation un sulfure de carbone parfaitement limpide et incolore, d'une odeur agréable rappelant le chloroforme, exempt de résidu à l'évaporation, ce qui facilite l'usage de ce précieux dissolvant.

De plus, le sulfure de carbone ainsi purifié dissout le brome sans modifier son état chimique. Cela permettra, dans beaucoup de cas, de remplacer l'eau bromée par la solution sulfocarbonique de brome, qui est très stable et n'émet presque aucune vapeur.

Enfin, une autre application se rencontre plus spécialement dans la mesure de l'absorption du brome par les corps gras en solution sulfocarbonique. On pourra éviter dans cette opération les corrections ennuyeuses et peu exactes que nécessitent les sulfures de carbone purifiés autrement, parce qu'ils absorbent tous plus ou moins de brome.

Séance du 5 mars 1891. — Cette séance, à la demande de M. Prat, a eu lieu dans son laboratoire, 163, rue Judaïque.

M. Prat désirait montrer à la Société une série d'expériences, soit physiques, soit chimiques, se rattachant à la question du fluor, et dont il aura occasion de parler dans ses communications ultérieures.

M. Prat avait fait imprimer un programme de ces expériences qui a été distribué aux membres de la Société présents à la séance; un exemplaire de ce programme a été déposé aux archives.

Séance du 19 mars 1891. — M. Lamey est nommé membre titulaire.

— M. de Lagrandval rend compte que la Commission chargée de la vérification des archives a trouvé qu'elles étaient en bon ordre, et que la Commission des finances a constaté la parfaite régularité des comptes du Trésorier.

La Société vote l'approbation de ces comptes et des remerciements à l'Archiviste et au Trésorier.

M. de Lagrandval donne lecture du projet de budget :

Frais de recouvrement des cotisations............F.	70
Frais de convocation..............................	150
Frais de correspondance..........................	150
Entretien..	200
Frais de catalogue.................................	300
Achats de livres pour compléter les collections......	200
Reliures pour 1891..................................	400
Impression des *Mémoires*...........................	3,000
Total...................F.	4,470

La Société approuve ce projet.

— M. Pionchon communique, au nom de MM. Aignan, professeur au lycée de Mont-de-Marsan, et Chabot, préparateur au même lycée, le résumé d'un travail ayant pour objet l'*Influence du débit et du verre sur le rendement lumineux d'un bec de gaz à double courant d'air,* et dont voici les principales conclusions :

Le rendement d'un bec de gaz à flamme circulaire est d'autant plus avantageux que le bec brûle plus de gaz, pourvu que la flamme ne file pas.

La forme du verre n'exerce qu'une influence très faible sur l'intensité de la lumière produite, mais la hauteur du verre joue un rôle considérable dans le rendement lumineux du bec pour un débit donné.

Pour différents becs munis de différents verres et fonctionnant dans les conditions du maximum de rendement, la dépense par Carcel et par heure est la même.

Séance du 9 avril 1891. — M. Brunel fait une communication sur les configurations régulières tracées sur une surface quelconque.

On appelle configuration tracée sur une surface un ensemble de points, de lignes et de surfaces que nous appellerons respectivement : sommets, arêtes et faces figurées sur la surface.

Nous ne considérerons ici que les surfaces fermées et ne présentant aucune singularité. Les surfaces possédant des points doubles ou des lignes doubles se trouvent exclues de notre examen.

En appelant A le nombre des arêtes, F le nombre des faces et S le nombre des sommets, on a sur une surface qui, par une déformation quelconque, peut se ramener à la sphère ou à l'ellipsoïde

(1) $$F + S = A + 2;$$

sur une surface qui, par déformation, peut être ramenée à la forme du tore, on a

(2) $$F + S = A;$$

sur une surface dans laquelle on peut faire p sections sans que la surface cesse d'être connexe, on a

(3) $$F + S = A - 2(p - 1).$$

Nous appelons configuration régulière une configuration telle que par chaque sommet passe le même nombre d'arêtes, et que chaque face soit limitée par le même nombre d'arêtes.

Dans ce cas particulier, m et n étant des nombres entiers, on doit avoir, qu'il s'agisse d'une surface de genre 0 ou de genre quelconque,

(4) $$mF = nS = 2A.$$

Les équations (1) et (4) conduisent à la considération des polyèdres connus, tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre, type de la double pyramide et polygone régulier tracé sur un grand cercle. Sur le tore, c'est-à-dire si on considère les équations (2) et (4), les valeurs admissibles de m et de n sont

	m	n
A	3	6
	4	4
	6	3

qui correspondent en somme aux seuls pentagones réguliers que l'on peut construire sur le plan.

M. Brunel montre comment on peut passer d'un pavage régulier tracé sur le plan à une infinité de configurations régulières sur le tore. L'équation (2) contenant A, F et S d'une façon homogène, le tore se présente ainsi avec un caractère tout spécial.

Pour aller plus loin, considérons l'équation (3) dans le cas parti-

culier de $p=2$, c'est-à-dire les configurations régulières tracées sur les surfaces à deux trous.

Les équations (3) et (4), en n'admettant pour m, n, A, F et S que des entiers, sont résolues par les systèmes qui figurent dans le tableau suivant :

		m	n	A	F	S		m	n	A	F	S
B	I	3	7	42	28	12	VIII'	6	4	12	4	6
	II	3	8	24	16	6	XIII	6	6	6	2	2
	III	3	9	18	12	4	I'	7	3	42	12	28
	IV	3	10	15	10	3	II'	8	3	24	6	16
	V	3	12	12	8	2	IX'	8	4	8	2	4
	VI	3	18	9	6	1	XIV	8	8	4	1	1
	VII	4	5	20	10	8	III'	9	3	18	4	12
	VIII	4	6	12	6	4	IV'	10	3	15	3	10
	IX	4	8	8	4	2	XII'	10	5	5	1	2
	X	4	12	6	3	1	V'	12	3	12	2	8
	VII'	5	4	20	8	10	X'	12	4	6	1	3
	XI	5	5	10	4	4	VI'	18	3	9	1	6
	XII	5	10	5	2	1						

Soit en tout 25 configurations régulières. Ces configurations existent effectivement et M. Brunel montre comment on peut construire quelques-unes d'entre elles. Les configurations correspondant à des valeurs μ et ν d'une part, et ν et μ d'autre part, des paramètres m et n s'appellent configurations réciproques ou polaires. A toute configuration correspond une autre configuration réciproque ayant même nombre d'arêtes que la première, et un nombre de faces et de sommets respectivement égal au nombre des faces et des sommets de l'autre.

Les configurations qui sont leurs propres réciproques sont particulièrement remarquables. Dans le tableau A ces configurations correspondent au cas de $m=4$, $n=4$; pour le tableau B ce sont les configurations marquées XI, XIII et XIV.

Séance du 23 avril 1891. — M. Aignan fait la communication suivante :

Étude expérimentale sur les becs de gaz à flamme plate ;

Par MM. A. Aignan et P. Chabot.

Ce travail a été entrepris afin de déterminer les types des becs à choisir pour brûler, en produisant le plus de lumière possible,

120, 150 et 200 litres de gaz d'éclairage dans les lanternes de la voie publique. Les becs des modèles ci-dessous désignés ont été examinés dans ce but :

1° *Papillon* stéatite ordinaire ;
2° *Papillon* en fer ;
3° *Papillon* stéatite *tête creuse ;*
4° *Manchester* stéatite ;
5° *Manchester* en fer ;
6° Becs *Raulin ;*
7° Becs dits *doubles.*

Chaque modèle comprend *dix* numéros. Le n° 1 est censé brûler 60 litres de gaz à l'heure ; le n° 10 est censé brûler 240 litres dans le même temps.

Les résultats mis sous forme de tableaux fournissent les conclusions suivantes :

A. — Le tableau I, qui résume la première série d'expériences, permet de faire les remarques suivantes :

1° Les becs 1, 2, 3 des différents systèmes examinés donnent une flamme trop peu éclairante pour qu'elle puisse être utilisée à l'éclairage public. Le rendement lumineux de ces becs est toujours faible et il décroît avec une grande rapidité lorsque la pression du gaz qui alimente le bec croît à partir d'une certaine limite.

2° L'écart présenté par le rendement lumineux, lorsque l'on donne au gaz deux pressions successives h_1 et h_2 très différentes, est d'autant plus faible que la fente du bec est plus large.

3° Lorsqu'un bec donne une flamme qui siffle ou qui ronfle, cela indique que la pression dans le bec est trop forte, et à une diminution de la pression correspond un accroissement du rendement lumineux. De même, lorsque la flamme est dentelée, agitée, vibrante, ou qu'elle présente l'aspect d'un éventail formé de rayons rectilignes bleus à leur base, la pression du gaz est trop forte pour produire un bon rendement lumineux.

4° Les becs Manchester se montrent inférieurs aux becs à fente, et les becs en fer, d'une manière générale, aux becs en stéatite.

5° Enfin, si les becs Raulin et les becs doubles se montrent dans leur ensemble très supérieurs à tous les autres, sous une pression très forte en apparence, cela tient à ce que, d'après leur construction, le gaz sort sous une faible pression de la fente où on l'allume.

B. — Le tableau II résume la deuxième série d'expériences.

On peut dire, d'une manière générale, que la *dépense lumineuse*

par carcel $\frac{V}{I}$ (1) d'un bec quelconque à flamme plate, quand on fait croître le débit du bec à partir de zéro, commence par décroître, atteint un minimum, puis croît à mesure que la pression du gaz augmente ainsi que le débit. Il faut remarquer que cette variation de $\frac{V}{I}$, rapide pour les becs à fente étroite, est beaucoup plus lente pour les becs à fente large. Enfin, si les becs en métal de petits calibres sont notablement inférieurs aux becs en stéatite du même numéro, l'écart entre les deux genres de becs devient faible pour les numéros les plus élevés, c'est-à-dire pour les becs à larges fentes. Quant aux becs Manchester que nous avons essayés, ils ne donnent de bons résultats que si l'on prend des becs de fort calibre et si la pression du gaz qu'ils débitent est faible, notablement inférieure à 10 millimètres d'eau.

C. — Le tableau III nous montre que pour les débits de 120, 150, 200 litres, qui nous intéressent particulièrement, les becs en stéatite dits *têtes creuses* sont les plus avantageux. De plus, ce sont les becs à large fente qui, à débit égal, donnent la plus grande quantité de lumière. Il est vrai que le gaz prenant dans ces becs une faible pression, la flamme qu'ils produisent est particulièrement sensible à l'agitation de l'air.

D. — Enfin, dans le tableau IV, nous avons indiqué pour les principaux becs étudiés la *dépense lumineuse minimum*, c'est-à-dire le nombre de litres de gaz brûlés par carcel dans le bec, lorsqu'il produit le rendement le plus avantageux. En face de cette dépense lumineuse minimum nous avons inscrit le volume du gaz brûlé à l'heure et la pression du gaz dans le bec.

Il résulte de ce tableau que chaque bec possède une dépense lumineuse minimum distincte. Nous avons vu, au contraire, en étudiant les becs à double courant d'air, surmontés d'un verre de hauteur inférieure ou au plus égale à 25 centimètres, que la dépense lumineuse minimum était très sensiblement la même pour tous les systèmes examinés. Cette dépense lumineuse minimum des becs à double courant d'air est voisine de 80 litres de gaz brûlés à l'heure par intensité lumineuse produite égale à un carcel. Les becs à flamme plate donnent une dépense lumineuse minimum bien supérieure, qui ne s'est abaissée dans aucune de nos mesures au-dessous de 105 litres.

(1) V, débit du bec à l'heure; I, intensité lumineuse produite exprimée en carcels.

— M. Soulé présente une étude sur la transformation linéaire d'une forme du degré *m* dans un espace à *n* dimensions. Cette substitution a été reconnue possible seulement pour les formes quadratiques, quel que soit le nombre des dimensions de l'espace, et pour les formes cubiques, le nombre des dimensions étant 2 et 3.

— M. Denigès fait une communication sur les nouvelles combinaisons qu'il a obtenues avec certains sulfites métalliques et les amines aromatiques :

Dans le cours de recherches entreprises à propos de certaines réactions colorées de l'aniline, j'eus l'occasion d'observer la formation d'un précipité blanc, soyeux et cristallin se produisant avec la plus grande facilité toutes les fois que je mettais en présence un sel de zinc, un bisulfite alcalin et de l'aniline. Ce précipité, très peu soluble dans l'eau, présentant au microscope de belles lamelles hexagonales, attira mon attention et je reconnus, après une série d'analyses assez discordantes et variables selon les conditions de formation du produit, que j'avais affaire à un mélange de deux sulfites conjugués de zinc et d'aniline, que je pus bientôt d'ailleurs obtenir l'un et l'autre à l'état de pureté absolue et de composition invariable.

Ces combinaisons renfermant les éléments de l'acide sulfureux, du zinc et de l'aniline, on pouvait chercher à généraliser le fait de leur formation en faisant varier : 1° l'amine aromatique ; 2° le métal ; 3° l'acide.

C'est ainsi que j'ai pu obtenir des composés du même ordre avec d'autres amines primaires telles que les toluidines et l'α-métaxylidine ; des amines secondaires comme les méthyl et éthylanilines ; des amines tertiaires telles que les diméthyl et diéthylanilines, et même avec les bases pyridiques et quinoléiques.

En faisant varier le métal, j'ai pu remplacer le zinc par le fer, le nickel, le cobalt, le manganèse, le cuprosum, le cadmium et le mercure.

Enfin, je suis arrivé à préparer non seulement des sulfites, mais aussi les hypophosphites, phosphites, phosphates, arsénites, arséniates correspondant à certains de ces sulfites. Je me propose également d'essayer les acides du sélénium et du tellure pour obtenir des composés parallèles à ceux que j'ai déjà formés.

Je ne m'occuperai dans cette première communication que des sulfites.

Lorsqu'on vient à traiter un sel soluble de cadmium, cobalt, nickel, ferrosum, manganèse, cuivre, zinc et mercurium, par du

bisulfite de soude et une solution aqueuse d'amine aromatique, il se forme un précipité à peu près insoluble dans l'eau et les dissolvants neutres, se présentant en belles lamelles hexagonales, de couleur variée selon la nature du métal et, sauf la combinaison mercurique, répondant à la formule générale

$$(SO^3)^2M''H^2,2\left(Az\begin{matrix} \diagup R' \\ -H \\ \diagdown H \end{matrix}\right)$$

dans laquelle R′ représente un radical aromatique.

Je montrerai ultérieurement par quelle formule de constitution il est possible de représenter ces produits.

J'ai ainsi obtenu les combinaisons des bisulfites des métaux que je viens de citer avec l'aniline, l'ortho et la paratoluidine, l'α-métaxylidine à l'exception des bisulfites de nickel et d'o-toluidine, de zinc et des toluidines et xylidine; soit en tout vingt-huit combinaisons bisulfitées.

Parmi ces composés, il en est quelques-uns qui méritent une mention spéciale; c'est ainsi que le bisulfite de cadmium et d'aniline se produit si facilement qu'on peut utiliser sa formation pour caractériser l'acide sulfureux ou même pour en rechercher microchimiquement de petites quantités dans une atmosphère : il suffit pour cela de mélanger 1 centimètre cube d'une solution saturée d'azotate de cadmium avec 20 centimètres cubes d'une solution aqueuse d'aniline à 2 p. 100 et d'acidifier au moment du besoin une petite quantité de ce liquide avec très peu d'acide acétique. Une baguette de verre imbibée à l'une de ses extrémités du mélange acidulé, puis portée au contact de gaz sulfureux, donne bientôt un dépôt blanc constitué de lamelles hexagonales très nettes.

Les bisulfites obtenus avec les amines aromatiques et le cuivre renferment ce métal sous forme de cuprosum (Cu^2); ils sont de couleur blanc jaunâtre et presque inaltérables à l'air et à la lumière.

Les bisulfites dérivés du mercure se distinguent de leurs congénères en ce qu'ils ne renferment qu'une molécule d'aniline pour une de bisulfite, mais contiennent en outre une molécule d'eau; leur formule générale est :

$$(SO^3)^2HgH^2, Az\begin{matrix} \diagup R' \\ -H \\ \diagdown H \end{matrix} + H^2O.$$

Lorsque, dans la préparation générale de ces divers composés, on remplace le bisulfite de soude par le sulfite neutre, il se produit des phénomènes différents, selon les sels considérés : avec le cadmium, le nickel, le fer, le cobalt, il se forme un précipité amorphe du sulfite de ces métaux avec le sel de manganèse; ce n'est qu'au bout de vingt-quatre heures qu'on a une cristallisation abondante de prismes clinorhombiques ne renfermant pas d'amine aromatique et répondant à la formule

$$(SO^3)^2Mn + 3H^2O;$$

c'est le sel décrit par Gorgeu, qui s'obtient ainsi d'une manière beaucoup plus simple que celle indiquée par l'auteur.

Avec le sel mercurique, le sulfite n'entre pas en combinaison, mais si l'on emploie le bichlorure de mercure et l'aniline, par exemple, il se forme au bout de quelques heures de belles aiguilles jaunâtres de formule $HgCl^2,2Az\begin{cases}C^6H^5\\H\\H\end{cases}$ déjà connue, mais qu'on obtient de cette manière facilement et pur.

Enfin, avec le zinc on prépare par l'emploi du sel neutre de soude une nouvelle série de sulfites de formule générale $SO^3Zn,Az\begin{cases}R'\\H\\H\end{cases}$ cristallisés en lamelles quadratiques, optiquement positives et dont j'ai présenté trois échantillons.

M. Denigès termine sa communication par plusieurs expériences, notamment par la formation extemporanée du chlorure de mercure et d'ortho-toluidine $HgCl^2,AzH^2C^7H^9(1.2)$, l'un des quatre chlorures doubles qu'il a obtenus en précipitant une solution de bichlorure de mercure par une solution acétique d'amine aromatique, et dont les trois autres termes qu'il présente à la Société sont : le chlorure de mercure et d'aniline $HgCl^2,AzH^2C^6H^5$; le chlorure de mercure et de paratoluidine $HgCl^2,AzH^2C^7H^9(1.4)$; enfin, le chlorure de mercure et d'α-métaxylidine $HgCl^2,AzH^2C^8H^7(1.3.4)$.

Séance du 14 mai 1891. — M. l'abbé Issaly est élu membre titulaire.

— M. Soulé termine sa communication sur les formes quadratiques avec application à un mode particulier de projection de l'ellipse.

— M. Blarez fait une communication sur des phénomènes relatifs à la solubilité des corps.

M. Blarez commence par rappeler les résultats des expériences qu'il avait déjà exposés devant la Société dans la séance du 21 novembre 1889, concernant la solubilité du bitartrate de potasse.

Ces expériences l'avaient amené à représenter par les formules suivantes ces phénomènes de solubilité :

a. Dans l'eau pure [Q = quantité (en grammes) dissoute dans 100 parties] :

$$Q_\theta = 0,351 + 0,00151\,\theta + 0,00055\,\theta^2,$$

ou

$$Q_\theta = 0,369 + 0,000569\,\theta^2.$$

b. Dans des solutions de chlorure de potassium :

1° Pour de faibles quantités :

$$Q_\theta = (0,369 + 0,000569\,\theta^2) - \mathrm{KCl};$$

2° Pour des quantités plus importantes :

$$Q_\theta = \frac{0,0489 + 0,000005216\,\theta^2}{\sqrt{K}}.$$

c. Dans des solutions d'un sel quelconque neutre de potassium :

Mêmes formules que pour le cas du chlorure.

De ces expériences, il résultait que la précipitation de la crème de tartre, étant fonction du K, le phénomène dépendait de l'équivalent du sel ajouté.

Aujourd'hui, ayant poursuivi et généralisé ces recherches, M. Blarez communique à la Société, en premier lieu, une étude sur la solubilité du chlorate de potassium.

Cette solubilité dans l'eau pure, il la traduit par la formule suivante :

$$Q_\theta = 3,2 + 0,109\,\theta + 0,0043\,\theta^2.$$

Par addition de potasse caustique ou d'un sel de potassium neutre, une précipitation partielle du chlorate a également lieu, et la quantité restée en dissolution peut être calculée ainsi :

$$Q_\theta = (3,2 + 0,109\,\theta + 0,0043\,\theta^2) - \mathrm{K}\ \text{(du sel ajouté)}.$$

C'est-à-dire que la somme du chlorate resté en dissolution et du potassium du sel étranger ajouté est constante et, de plus, égale

à la quantité de chlorate qui dissoudrait l'eau pure dans les mêmes conditions.

Une seconde série de recherches faites avec le sulfate de potasse l'a conduit à des résultats à peu près de même ordre.

a. Dans l'eau pure la solubilité de ce sel peut être représentée par la formule

$$Q_\theta = 8,5 + 0,12\theta;$$

b. Et dans des solutions de sels de potassium, par

$$Q_\theta = (7,5 + 0,1417\theta) - K \text{ (du sel ajouté)}.$$

On peut observer, en outre, que la somme du sulfate resté en dissolution et de l'hydrate de potasse, qui correspond au potassium du sel étranger ajouté, est égale au poids de sulfate de potasse que l'eau pure dissoudrait à la même température.

Il est sous-entendu que ces formules ne s'appliquent qu'au cas où l'eau du sel est en solution saturée et que le sel étranger ajouté l'est en assez faible proportion pour qu'on puisse considérer sa solution comme étant très diluée et que, de plus, elles ne sont qu'approchées.

Puis, généralisant ces résultats en ce qu'ils ont de commun, et en dehors des applications diverses qu'on est en droit d'en attendre, M. Blarez fait remarquer toutes les conséquences théoriques que l'on peut en déduire, concernant la constitution des solutions salines, et l'état des sels dissous, selon qu'ils sont en solutions saturées ou en solutions relativement diluées. Dans ce dernier cas on est conduit à admettre un état plus ou moins avancé de dissociation si on veut expliquer toutes les expériences qu'il a décrites.

Il reviendra, au reste, sur ces faits, et il formulera dans de prochaines communications les lois embrassant ces divers phénomènes.

Séance du 28 mai 1891. — M. le Président met aux voix la proposition d'adhésion de la Société des Sciences physiques et naturelles à la Société des Amis de l'Université.

La proposition est votée à l'unanimité.

— M. Blarez présente la suite de sa communication sur les phénomènes relatifs à la solubilité des corps :

Dans la précédente séance, j'ai donné les formules générales relatives à la solubilité du chlorate et du sulfate de potassium dans

les solutions de sels potassiques. Voici quelques considérations à propos de ces formules, que le manque de temps m'a empêché d'exposer en détail.

1° Solubilité du chlorate de potassium.

Étant donnée la formule générale :

$$Q_\theta = (3^{gr}2 + 0{,}109\theta + 0{,}0043\theta^2) - \text{K (du sel ajouté)},$$

dans laquelle la première portion ($3^{gr}2 + 0{,}109\theta + 0{,}0043\theta^2$) représente la quantité que dissout l'eau pure à $\theta°$, on voit que si, dans une solution saturée de chlorate de potassium, on ajoute un poids donné de potassium (à l'état de sel soluble), il y a précipitation d'un poids égal de chlorate. Or, si on cherche à rapporter ces résultats à des poids moléculaires, ou bien aux équivalents des sels mis en présence (puisque c'est ce qui résulte de nos précédentes communications), on voit que dans des poids égaux de chlorate de potassium et de potassium métallique, pour un équivalent de chlorate, il y a trois équivalents de potassium. En effet :

Une molécule ou un équivalent de ClO^3K pèse 122,5,
et trois atomes ou trois équivalents de K pèsent 117,3.

C'est donc là le phénomène qui domine, parmi tous ceux que l'on peut invoquer, lorsqu'on précipite une certaine quantité de chlorate de potassium d'une solution saturée, par adjonction d'une petite quantité d'un autre sel de potassium très soluble.

Nous avons vérifié l'exactitude de ce fait avec les composés suivants : potasse caustique, carbonate de potasse, acétate de potasse, chlorure, bromure, iodure, azotate, sulfate et chromate neutres de potassium.

Il faut donc, pour obtenir la précipitation d'une molécule de chlorate de potasse ClO^3K, trois molécules ou équivalents des composés : KOH, KCl, KBr, KI, AO^3K et $CH^3,COOK$, et une molécule et demie ou trois équivalents de CO^3K^2, SO^4K^2, CrO^4K^2.

Des expériences sont en cours d'exécution, pour d'*autres* sels de potassium organiques, provenant d'acides mono ou polybasiques, ou provenant d'acides à fonctions mixtes.

2° Solubilité du sulfate neutre de potassium :

Indépendamment de la formule générale que nous avons donnée, on peut en établir une autre qui vérifie encore mieux les résultats expérimentaux. La voici :

$Q_\theta = (8^{gr}5 + 0{,}12\theta) - \text{KOH}$ (correspondant au K du sel ajouté), dans laquelle la portion ($8^{gr}5 + 0{,}12\theta$) représente la quantité de sulfate qui dissout l'eau pure à $\theta°$. Cette formule signifie que dans

une solution saturée de SO^4K^2 la précipitation d'un poids donné de sulfate exige l'adjonction d'un poids égal de KOH correspondant au potassium du sel étranger. Encore ici, en cherchant à rapporter ce fait d'expérience aux équivalents ou molécules des corps mis en présence, on trouve qu'une molécule de SO^4K^2 est précipitée par trois molécules de KOH; parce que ce sont sensiblement là les proportions respectives de molécules contenues dans des poids égaux de SO^4K^2 et de KOH. En effet :

Une molécule de SO^4K^2 ou deux équivalents pèsent 174,
Trois molécules ou équivalents de KOH pèsent 168.

C'est ce que donnent en effet : le KCl, le KBr, le KI et le carbonate, l'oxalate neutre et le succinate neutre de potassium.

Voici donc les faits généraux : *Dans le cas du* ClO^3K, *comme dans celui du* SO^4K^2, *pour précipiter une molécule* (il s'agit d'un sel en solution saturée) *il faut une quantité suffisante d'un autre sel soluble de potassium renfermant trois atomes ou trois équivalents de* K.

La potasse caustique ne se comporte pas de même façon vis-à-vis les deux sels sus-mentionnés, la précipitation est plus forte dans le cas du sulfate; ainsi, pour une molécule de sulfate neutre SO^4K^2, il nous a fallu approximativement 2KOH, ce qui s'accorderait, au reste, avec ce que vient de publier tout récemment M. R. Engel. Tandis qu'il faut 3KOH pour précipiter ClO^3K.

Avec l'acétate de potasse, il en est de même; 2K suffisent pour SO^4K^2, mais nous devons ajouter que l'acide acétique libre, lui-même, provoque la précipitation. Des expériences préliminaires nous ont montré qu'il fallait environ douze équivalents d'acide acétique pour précipiter une molécule de sulfate neutre SO^4K^2.

Nous poursuivons cette étude avec les sels et les acides organiques.

Il est, toutefois, une remarque que l'on peut faire immédiatement. Lors de la précipitation de ClO^3K (en solution saturée) par SO^4K^2 (en solution diluée), ce dernier sel se comporte comme s'il était formé de demi-molécules ou d'équivalents libres $\frac{SO^4K^2}{2}=87$, par conséquent *dissocié*. Au contraire, en solution saturée, ce sel se comporte comme étant *non dissocié,* c'est-à-dire que 3K précipitent une molécule $SO^4K^2=174$, tout comme il faut également 3K pour précipiter une molécule de chlorate de potasse $ClO^3K=122,5$.

Ajoutons, enfin, que tous ces phénomènes se rapprochent, dans leur ensemble, avec des différences toutefois, de ceux trouvés par M. R. Engel, lorsqu'il a fait agir les acides libres sur les sels des

mêmes acides; de ceux signalés par M. Nernst; de ceux, enfin, relatifs à l'osmose. C'est ce qu'au reste nous nous proposons de discuter, lorsque nous aurons réuni tous les documents expérimentaux dont nous avons besoin.

— M. Denigès fait une communication relative à l'action de l'eau sur les combinaisons des sulfites métalliques avec les amines aromatiques :

Ces combinaisons, extrêmement peu solubles dans l'eau froide, se dissolvent mieux à chaud. La partie dissoute est entièrement dissociée en amine aromatique et bisulfite du métal.

Pour étudier cette action de l'eau, j'ai employé le dispositif suivant :

Dans un matras de 1/4 de litre environ, parcouru par un courant très lent d'acide carbonique humide, j'introduisais 105 centimètres cubes d'eau et je portais à l'ébullition; l'eau qui distillait, se condensait dans un réfrigérant, et quand il en était passé 5 centimètres cubes, je soulevais le bouchon du matras pour introduire un poids déterminé de la substance que j'étudiais; puis continuant l'ébullition, je recueillais le liquide distillé par portions de 5 centimètres cubes et j'y dosais l'acide sulfureux par la solution normale décime d'iode et l'aniline par l'eau bromée.

En opérant ainsi avec des quantités équivalentes de sulfite de manganèse et d'aniline, de sulfite d'aniline, d'acide sulfureux et d'aniline, j'ai pu arriver à démontrer que le sulfite de manganèse et d'aniline se comportait, en dissolution dans l'eau bouillante, comme un mélange d'aniline et de bisulfite de manganèse. Je suis parvenu à une démonstration analogue pour les autres combinaisons des bisulfites métalliques avec les amines aromatiques.

Séance du 11 juin 1891. — M. Brunel fait une communication sur la relation qui existe entre le problème de la détermination de la distribution électrique dans un système de conducteurs linéaires et la question du saut du cavalier sur l'échiquier.

Kirchoff a montré, dans le tome LXXII (1847), des *Annales de Poggendorf*, comment on pouvait former les équations qui dans un réseau quelconque formé de conducteurs linéaires fournissent les intensités relatives à chacune des branches du réseau.

Ces équations jouissent de propriétés tout à fait spéciales. Le dénominateur commun dans l'expression de l'une quelconque des intensités est la somme des combinaisons des résistances des différentes branches μ à μ, telles que si on supprime les branches qui

correspondent aux résistances apparaissant dans une combinaison il ne reste, dans le réseau, après la suppression, aucune figure fermée.

On pose :

$$\mu = m - n + 1$$

m étant le nombre des branches et n le nombre des sommets.

En ce qui concerne le numérateur de I_λ, il se présente comme la somme des combinaisons $\mu - 1$ à $\mu - 1$ des résistances métalliques telles que si on supprime les branches correspondantes, il ne reste, après la suppression, qu'une seule figure fermée dans le réseau, λ faisant partie de cette figure fermée. Chaque combinaison est multipliée par la somme des forces électromotrices qui sont relatives à cette figure fermée.

Inversement, étant donné un réseau quelconque, il suffit d'écrire les équations de Kirchoff et de les résoudre pour avoir les combinaisons relatives à des branches déterminées, et par suite les combinaisons de branches telles que, les branches une fois supprimées, il n'existe plus aucune figure fermée ou bien il en existe encore une seule.

Les équations de Kirchoff fournissent donc un moyen de répondre à des questions fondamentales dans la théorie des réseaux.

Nous ne considérerons ici qu'un cas particulier, celui qui répond au problème du saut du cavalier sur l'échiquier.

La question à résoudre est de déterminer quelles sont les cases que doit parcourir successivement le cavalier, avec sa marche propre, pour occuper, en partant d'une case donnée, successivement toutes les cases de l'échiquier. Imaginons qu'on relie, par un lien de forme quelconque, le centre de chacune des cases de l'échiquier aux centres des différentes cases auxquelles peut aboutir le cavalier en partant de la première case. Nous formons ainsi un réseau. Le nombre des sommets de ce réseau est égal à 64. Le nombre des branches du réseau est facile à compter. Il est égal à 168.

En écrivant les équations de Kirchoff relatives à ce système considéré comme formé de conducteurs linéaires, on aura un système de

$$63 + 105 = 168$$

équations. Ces équations pourront être écrites de bien des façons différentes, mais nous connaissons, en tous cas, des propriétés du dénominateur commun des inconnues. Supposons développé le

déterminant à 168 lignes et 168 colonnes qui représente ce dénominateur. A un terme de ce déterminant correspond une suite déterminée de résistances en nombre égal à 105 et par conséquent aussi une suite complémentaire de résistances formée avec les résistances qui n'apparaissent pas dans le terme considéré. Cette suite complémentaire ne contient, d'après le théorème de Kirchoff, aucun trajet fermé. Une suite complémentaire quelconque correspond ou bien à une *ligne polygonale* telle que de chaque sommet, sauf du dernier, parte une branche et que à chaque sommet, sauf au premier, aboutisse une branche, ou bien une *arborescence* telle que certains sommets soient points de jonction de plus de deux branches. Les lignes polygonales seules correspondent à des solutions du problème du cavalier.

La solution du problème revient donc à former le déterminant du système des 168 équations linéaires, à écrire les suites complémentaires, et à supprimer, parmi ces suites, celles qui correspondent à des arborescences. Les suites qui subsistent donnent toutes les solutions.

La considération des numérateurs des inconnues conduit à des remarques intéressantes. D'une façon générale, on peut dire que la méthode précédente donne la clef de la théorie des réseaux.

Séance du 25 juin 1891. — M. Hautreux présente une carte de l'embouchure de la Gironde, datée de 1592, qui se trouve dans l'*Histoire du commerce et de la navigation à Bordeaux,* par Francisque Michel. Cette carte est d'origine anglaise; elle fut dressée à l'occasion du siège de Blaye qui avait été entrepris par le maréchal de Matignon, lieutenant d'Henri IV, avec l'appui de la flotte anglaise. La ville était occupée par le parti de la Ligue, commandé par d'Esparbès de Lussan; la flotte d'Espagne vint à son secours; une bataille navale eut lieu près du Bec-d'Ambès, la flotte anglaise fut presque détruite et le maréchal dut lever le siège.

En raison de son ancienneté, l'intérêt de ce document est considérable pour l'histoire des modifications éprouvées par notre rivière. On y constate des erreurs évidentes et sur les distances et sur l'orientation de la carte. Les profondeurs marquées dans les passes sont peut-être un peu faibles, en tous cas elles indiquent bien l'accore des dangers extérieurs.

Mais, où les renseignements sont précieux, c'est dans la disposition des bancs, dans la direction des passes de navigation, dans la désignation de celles qui peuvent servir à la petite ou à la grande

navigation, et enfin dans l'écriture adoptée pour les noms de lieux, défigurée par la prononciation anglaise; ainsi Cordouan est appelé Cordé (Corden) qui rappelle le mot *Cordan* en usage à cette époque pour désigner le feu d'entrée.

L'aspect général du dessin est semblable à la carte hollandaise de 1680, publiée dans le *Flambeau de la mer* de Van Keulen, un siècle plus tard. Les bancs des Anes y sont bien marqués, avec une coupure entre deux praticable par les galères; la passe principale de l'entrée est celle qu'on appelle aujourd'hui du Mattelier; la passe de Graves est appelée passe des Espagnols. Les navires, après avoir longé la côte de Royan, suivaient jusqu'à Méchers et de là se dirigeaient sur Castillon en passant entre deux lignes de bancs bien indiqués; ceux du milieu du fleuve, depuis Tallemont jusqu'à Blaye, découvraient à marée basse.

Les navires traversaient le fleuve de Pauillac vers Blaye et suivaient cette côte jusqu'au Bec-d'Ambès. Une île habitée (l'île Cazeau) est indiquée près du Bec, et une suite de bancs, qui assèchent à basse mer, est marquée entre Blaye et le Bec-d'Ambès; les navires pouvaient aussi passer dans le bras de Macau.

Cette carte vient donc confirmer les résultats de l'analyse des anciens documents que nous avons présentés à la Société, et entre autres les modifications dans les dispositions des bancs et passes de l'embouchure, la destruction des bancs du milieu du fleuve en aval de Pauillac et la formation d'îles nouvelles entre le Bec-d'Ambès et Blaye.

— M. Brunel fait ensuite une communication sur les surfaces à un seul côté. En un point M d'une surface, on choisit une direction de la normale MN. Si la surface est telle qu'il existe sur elle des trajets fermés MPM jouissant de cette propriété que la normale change de direction quand on part du point M pour revenir au même point, on dit que la surface est à un seul côté.

La bande de papier de Möbius fournit un exemple simple.

Une surface algébrique à un seul côté possède nécessairement des singularités, points coniques ou lignes multiples.

M. Brunel montre comment on peut construire une infinité de surfaces de cette nature et il établit que, en considérant la surface comme formée de deux feuillets superposés, on retombe sur une surface à deux côtés.

Séance du 9 juillet 1891. — M. Millardet fait une communication sur l'hybridation de la vigne.

La Société vote l'impression de ce travail dans ses *Mémoires*.

— M. Pérez entretient la Société des observations qu'il a faites sur l'invasion des sauterelles en Algérie.

Séance du 23 juillet 1891. — MM. Gayon et Dubourg ont trouvé que, dans les vins tournés ou mildiousés, le poids de glycérine diminue, au lieu de rester constant, comme on l'admet généralement; ils ont constaté, en outre, qu'une partie de la glycérine s'éthérifie avec le temps.

— M. Pionchon esquisse devant la Société le plan d'un ouvrage intitulé : *Essai sur les formes générales de raisonnement appliqués à l'étude des phénomènes physiques,* où il se propose de montrer comment l'exposé didactique de la physique peut être ramené à un petit nombre de raisonnements types présentés en termes extrêmement généraux sur lesquels peuvent être ensuite calqués en quelque sorte sans modification aucune, sauf le changement nécessaire des noms des grandeurs considérées, les études particulières les plus diverses. M. Pionchon montre, par exemple, comment un même type de raisonnement peut être appliqué à l'étude des effets mécaniques des réservoirs de fluides, des effets calorifiques des corps quelconques et des effets électriques des corps électrisés, ce qui donne la raison d'être et la véritable signification des analogies souvent signalées entre certaines questions d'hydraulique, de chaleur et d'électricité. Une telle méthode se recommande pour l'enseignement comme la plus concise, la plus claire, le plus rigoureuse et la plus élémentaire. A quoi tend, en effet, toute science sinon à devenir, pour le plus grand soulagement de la mémoire, pour la plus grande satisfaction et le plus grand profit de l'esprit, une langue bien faite ou une collection de schémas logiques nettement dessinés et méthodiquement ordonnés?

— M. Morisot avait déjà indiqué qu'on obtenait pendant plusieurs heures un courant d'intensité à peine variable à l'aide d'un élément de pile disposé de la manière suivante. Une couronne de charbons plonge dans une solution saturée de bichromate de potasse additionnée d'un volume d'acide sulfurique égal au quart de son propre volume. Un cristal de bichromate forme réserve.

A l'intérieur de cette couronne un vase poreux contient une dissolution du sulfate de magnésie de densité 1,10 additionnée d'acide sulfurique $\left(\frac{1}{15}\text{ du volume}\right)$. La densité totale de ce liquide, où plonge le zinc amalgamé, est 1,14.

Mais la constance est obtenue d'une façon bien plus certaine et plus rigoureuse, pendant dix heures environ, si on emploie, au lieu d'un vase poreux unique, l'ensemble de deux vases poreux concentriques; l'intervalle annulaire, épais de 2 millimètres, est rempli de pierre ponce finement pulvérisée, qu'on imprègne d'avance, ainsi que les vases poreux, d'acide sulfurique étendu de quatre fois son volume d'eau.

Aussitôt le circuit fermé, le courant prend et conserve pendant plusieurs heures, presque une journée, une intensité de $0^{\text{ampère}},182$ (La résistance extérieure étant de 10 ohms, la résistance intérieure de $0^{\text{ohm}},65$ en moyenne, et la force électromotrice de $2^{\text{volts}},04$).

M. Morisot attribue cette constance à l'obstacle que le diaphragme renforcé oppose au mélange des deux liquides, tandis qu'il oppose au passage du courant électrique une résistance à peine supérieure à celle d'un diaphragme ordinaire.

Les expériences commencées permettront d'établir les meilleures conditions à adopter dans la pratique et aussi de confirmer les vues théoriques indiquées précédemment.

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DES SYSTÈMES DE MESURES

USITÉS EN PHYSIQUE

PAR M. J. PIONCHON

PROFESSEUR DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

AVANT-PROPOS

La théorie générale des mesures, le choix systématique des unités, la solution des problèmes relatifs à l'expression numérique des résultats de l'expérience, sont des questions capitales dans l'étude de la physique et de ses applications. Aussi n'est-il pas aujourd'hui de traité de physique pure ou appliquée où ne se trouve au moins un chapitre consacré à ces matières. Mais ce sujet est de ceux qui ne sauraient être résumés en quelques pages sans laisser subsister des obscurités, des hésitations, des difficultés dans l'esprit du lecteur non exercé qui a besoin d'apprendre. Si l'on veut donner à son examen toute la précision qu'exigent son importance et son utilité, on s'aperçoit que ce n'est pas un chapitre qu'il faut écrire, mais plusieurs, constituant une sorte de petit traité propre à servir d'Introduction aux traités généraux de physique théorique et expérimentale.

C'est ce petit traité qu'on a essayé de faire ici en exposant, dans un ordre didactique et avec des détails suffisants pour en rendre l'étude tout à fait élémentaire, les sujets indiqués dans la table suivante :

LIVRE I

Possibilité et utilité de la coordination en système des unités de mesures scientifiques, soit géométriques, soit mécaniques.

CHAPITRE I. — Définitions. Propositions générales sur les mesures.
CHAPITRE II. — Tableau des principales grandeurs géométriques

et mécaniques qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques.

CHAPITRE III. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs géométriques.

CHAPITRE IV. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs cinématiques.

CHAPITRE V. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs dynamiques.

CHAPITRE VI. — Formule générale relative à la comparaison des grandeurs géométriques et mécaniques. Tableau des cas particuliers.

CHAPITRE VII. — Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées. Dimensions.

CHAPITRE VIII. — Choix systématique des unités. Unités normales. Mesures absolues.

CHAPITRE IX. — De l'homogénéité et de la similitude en géométrie et en mécanique.

LIVRE II

Examen de divers systèmes pratiques d'unités absolues géométriques et mécaniques.

CHAPITRE I. — Différents types possibles de systèmes coordonnés d'unités dérivées.

CHAPITRE II. — Choix des unités fondamentales les plus convenables pour constituer un système universel.

CHAPITRE III. — Système métrique.

CHAPITRE IV. — Système (CGS).

CHAPITRE V. — Solution générale des problèmes relatifs aux changements d'unités. Exemples.

CHAPITRE VI. — Calculs symboliques.

LIVRE III

Application des systèmes absolus d'unités géométriques et mécaniques à l'étude des phénomènes physiques, et particulièrement des phénomènes électriques et magnétiques.

CHAPITRE I. — Lois physiques; influence des changements d'unités sur les formules qui les expriment.

CHAPITRE II. — Grandeurs électriques et magnétiques. Propositions relatives à leur comparaison.

CHAPITRE III. — Choix systématique des unités électriques et magnétiques.

CHAPITRE IV. — Systèmes électrostatiques.

CHAPITRE V. — Système électromagnétique.

CHAPITRE VI. — Système de M. Bertrand.

CHAPITRE VII. — Détermination du coefficient V_i. Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.

CHAPITRE VIII. — Influence du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques sur l'expression des grandeurs électriques et magnétiques dans les différents systèmes.

CHAPITRE IX. — Définition des systèmes d'unités électriques et magnétiques adoptés dans les recherches scientifiques.

CHAPITRE X. — Définition des systèmes d'unités électriques et magnétiques adoptés dans la pratique industrielle.

APPENDICE

Notes.
Bibliographie.
Index.

Le titre d'*Introduction* donné à ce petit traité est destiné à indiquer que l'étude du sujet auquel il se rapporte y est entreprise à partir des éléments. Mais cette étude est poussée assez loin pour satisfaire amplement tous ceux (étudiants, ingénieurs, etc.) qui, afin d'éviter toute erreur dans les applications, ont intérêt à se rendre un compte rigoureux des formules de la physique. En effet, de l'intelligence des formules les plus simples et de la connaissance des unités relatives à la géométrie et à la mécanique, le lecteur est conduit progressivement à l'intelligence des formules fondamentales et à la connaissance raisonnée des unités relatives à l'électricité et au magnétisme.

Le complément pratique indispensable à cette première étude se trouvera dans un second ouvrage, plus rapproché des applications, qui fera suite à celui-ci sous ce titre : *Introduction à la pratique des systèmes de mesures usités en physique,* et qui renfermera des formules et des données numériques permettant d'effectuer tous les calculs usuels relatifs aux mesures, et de

nombreux exemples de conversion de mesures consistant dans l'évaluation en unités (CGS) des principales données expérimentales relatives aux diverses parties de la physique.

On trouvera plus loin un index bibliographique présentant l'énumération des publications les plus importantes auxquelles a donné lieu, envisagée sous ses aspects les plus divers, la question des mesures absolues. Le lecteur qui aura étudié avec fruit la présente Introduction sera parfaitement préparé, si ce genre de spéculations l'intéresse, à entreprendre sans difficulté la lecture de ces différents ouvrages.

LIVRE I

Possibilité et utilité de la coordination en système des unités de mesures scientifiques, soit géométriques, soit mécaniques.

CHAPITRE I

Définitions. — Propositions générales sur les mesures.

Art. 1.

Le mot *quantité* a reçu des mathématiciens modernes une grande extension ([1]). Pour l'objet que nous avons en vue dans ce traité, il nous suffira de lui garder son sens étymologique. Nous l'emploierons exclusivement à désigner toute chose dont on peut concevoir des parties aliquotes, comme une longueur, un intervalle de temps, etc., c'est-à-dire toute chose à laquelle peuvent s'appliquer les notions d'égalité et d'addition.

Si rien ne limite la petitesse des parties aliquotes dont une quantité peut être considérée comme l'assemblage, cette quantité est dite *continue*.

On peut faire entre les diverses quantités une distinction

([1]) « On appelle en général *quantité* tout ce qui peut être l'objet d'une opération mathématique.

» La définition de la quantité comprend non seulement les objets réels, considérés au point de vue du nombre et de la grandeur, mais encore les signes d'opération eux-mêmes. »

Houël, *Considérations sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique* (*Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux*, 1882, t. V, 2e s., p. 149).

suivant que leur notion implique ou non l'idée d'un ordre dans le groupement de leurs parties aliquotes. Une surface nous offre un exemple du premier cas : ainsi un carré et le parallélogramme construit sur la diagonale et le côté sont composés des mêmes parties aliquotes, mais diversement assemblées. Un angle plan est une quantité du second genre, car il ne saurait être question de modes divers dans l'assemblage de ses parties aliquotes.

Deux quantités du premier genre, composées de parties aliquotes égales et en même nombre sont dites ***égales*** si l'arrangement des parties est le même, et ***équivalentes*** dans le cas contraire.

Lorsque deux quantités ont été reconnues égales ou équivalentes, leur comparaison est achevée et aussi parfaite que possible.

Lorsque deux quantités ont été reconnues inégales, leur comparaison n'est complète et précise que si l'on détermine la fraction de la plus grande à laquelle la plus petite est égale ou équivalente.

Cette fraction exprime le rapport de la plus petite des deux quantités à la plus grande, et son inverse le rapport de la plus grande à la plus petite (1).

Art. 2.

Toute chose dont la comparaison avec une chose de même nature fait intervenir la notion de rapport; toute chose, en d'autres termes, dont on peut définir des multiples ou des sous-multiples est ce qu'on appelle en général une ***grandeur.***

La définition d'un multiple ou d'un sous-multiple n'implique pas toujours l'idée précise d'un assemblage de parties aliquotes. Ainsi, une longueur et une vitesse étant des choses dont on peut définir des multiples ou des sous-multiples méritent éga-

(1) Ce rapport peut être commensurable ou incommensurable. Voir, pour la théorie des rapports incommensurables, Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.*

lement le nom de grandeur; mais ce sont des grandeurs de caractères différents en ce sens que, tandis que la première se présente intuitivement comme une collection de parties aliquotes, il n'en est pas de même de la seconde.

Pour donner quantitativement une idée précise d'une grandeur, on ne saurait mieux faire que d'indiquer le rapport de cette grandeur à une grandeur de la même espèce qui aura été au préalable nettement conçue.

Rapporter ainsi une grandeur à une grandeur type de même nature, c'est effectuer ce qu'on appelle la *mesure* de la grandeur considérée.

La grandeur prise pour terme de comparaison se nomme l'*unité* des grandeurs en question.

On appelle *valeur numérique* d'une grandeur le nombre exprimant le rapport de cette grandeur à l'unité des grandeurs de son espèce.

Pour représenter une grandeur, nous ferons usage de l'initiale de son nom placée entre parenthèses, conformément à l'usage établi par Maxwell [1], et pour représenter sa valeur numérique, nous emploierons cette même initiale sans parenthèses. Ainsi

$$G$$

représentera la valeur numérique de la grandeur

$$|G|.$$

Art. 3. — *Propositions fondamentales.*

La valeur numérique d'une grandeur donnée dépend du choix de la grandeur de même espèce prise pour unité. Par exemple, si une grandeur $|G|$ vaut G fois une certaine unité $|\mathfrak{G}|$, elle vaudra kG fois une unité k fois plus petite que $|\mathfrak{G}|$, et $\frac{G}{k}$ fois une unité k fois plus grande.

---

[1] *Traité d'électricité et de magnétisme. — Préliminaires.*

Donc :

I. *La valeur numérique d'une grandeur déterminée varie en raison inverse de l'unité choisie.*

Soient deux grandeurs de même espèce $|G|$ et $|\mathcal{G}|$ valant respectivement G fois et $\mathcal{G}$ fois l'unité des grandeurs de leur espèce. Cette unité peut être considérée comme la $\mathcal{G}^e$ partie de $|\mathcal{G}|$, et par suite on peut dire que la première grandeur vaut G fois la $\mathcal{G}^e$ partie de la seconde ou $\frac{G}{\mathcal{G}}$ fois la seconde. Donc :

II. *Le rapport g de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport de leurs valeurs numériques :*

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|} = g = \frac{G}{\mathcal{G}}.$$

CHAPITRE II

Tableau des principales grandeurs géométriques et mécaniques qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques.

L'étude des phénomènes physiques exige la considération de divers ordres de grandeurs géométriques et mécaniques qu'on peut diviser en trois catégories :

I. — Grandeurs géométriques.

Longueurs.
Surfaces.
Volumes.
Angles (plans ou solides).
Courbures (de lignes ou de surfaces), etc.

II. — Grandeurs cinématiques.

Temps.
Vitesses (linéaires ou angulaires).
Accélérations, etc.

III. — Grandeurs dynamiques.

Forces.
Moments.
Travaux.
Puissances mécaniques.
Intensités de pressions.
Poids spécifiques.
Masses.
Densités.
Moments d'inertie.
Quantités de mouvement.
Forces vives, etc.

Ces différentes grandeurs ne se montrent pas toutes à la fois dans tous les phénomènes. Elles se présentent diversement associées et en plus ou moins grand nombre, suivant la diversité et la complication des phénomènes.

La comparaison de ces grandeurs à des grandeurs respectivement de même espèce, et par conséquent leur mesure, repose sur des définitions et des propositions qu'il est de toute nécessité d'examiner d'abord d'une façon précise.

Cet examen fera l'objet des trois chapitres suivants.

CHAPITRE III

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs géométriques.

Art. 1. — *Longueurs.*

§ 1. — Lignes droites.

1. *Définition de l'égalité et de l'inégalité de deux lignes droites.* — Considérons une longueur $|L|$ prise sur une ligne droite entre deux points A et B. Soit d'autre part une longueur $|\mathfrak{L}|$ prise aussi sur une ligne droite entre deux points $\mathfrak{A}$

et $\mathcal{B}$. Imaginons qu'on amène l'origine A et la direction AB de $|L|$ à coïncider avec l'origine $\mathcal{A}$ et la direction $\mathcal{AB}$ de $|\mathcal{L}|$. — Trois cas peuvent se présenter : le point B peut se trouver entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou en coïncidence avec $\mathcal{B}$, ou au delà de $\mathcal{B}$. La longueur $|L|$ est dite : dans le premier cas ***inférieure***, dans le second cas ***égale***, dans le troisième cas ***supérieure*** à la longueur $|\mathcal{L}|$.

2. ***Multiples et sous-multiples d'une longueur donnée.*** — Une longueur obtenue en plaçant bout à bout suivant la même direction deux longueurs égales à une longueur donnée est dite ***double*** de la première. En plaçant bout à bout suivant la même direction trois longueurs égales on aura une longueur ***triple***, et ainsi de suite. Étant donnée une longueur, on en concevra ainsi aisément un multiple quelconque.

La division d'une longueur en parties égales est l'opération inverse de la précédente. Étant donnée une longueur, on peut en imaginer et construire un sous-multiple quelconque.

3. ***Comparaison des longueurs de deux lignes droites.*** — Soient $|L|$ et $|\mathcal{L}|$ deux longueurs données. Si $|l|$ est une longueur quelconque, inférieure à la fois à $|L|$ et à $|\mathcal{L}|$, il existe deux multiples de $|l|$ consécutifs :

$$N\,|l|, \qquad (N+1)\,|l|$$

comprenant entre eux la longueur $|L|$ et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|l|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|l|,$$

comprenant entre eux la longueur $|\mathcal{L}|$, N et $\mathcal{N}$ désignant les plus grands nombres de fois qu'on peut porter bout à bout la longueur $|l|$ respectivement sur $|L|$ et sur $|\mathcal{L}|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Or si l'on suppose que $|l|$ diminue indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'une longueur plus petite que $|L|$ à une longueur plus grande que $|\mathfrak{L}|$; le second est le rapport d'une longueur plus grande que $|L|$ à une longueur plus petite que $|\mathfrak{L}|$. Plus la longueur $|l|$ est petite, plus les longueurs dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisines respectivement de $|L|$ et de $|\mathfrak{L}|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est ce qu'on appelle le rapport des longueurs $|L|$ et $|\mathfrak{L}|$.

On peut toujours en théorie prendre la longueur $|l|$ assez petite pour que les deux rapports

$$\frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathfrak{N}}$$

diffèrent entre eux, et par conséquent pour que chacun d'eux diffère de la limite d'une quantité inférieure à tout nombre donné, si petit qu'il soit. Dans la pratique, l'approximation avec laquelle on pourra évaluer le rapport des longueurs de deux lignes droites sera subordonnée au degré de petitesse que la perfection des appareils permettra de donner à $|l|$ (¹).

§ 2. — Lignes courbes.

La longueur d'une ligne courbe étant définie comme la limite d'une somme de longueurs de lignes droites, le rapport des longueurs d'une ligne courbe et d'une ligne droite et plus généralement le rapport des longueurs de deux lignes courbes se ramène à l'évaluation du rapport de deux lignes droites.

(¹) « Les déterminations métrologiques modernes... ont montré qu'il est possible d'atteindre dans la mesure des longueurs, dans de bonnes conditions de poli des surfaces et de tracés, une précision de l'ordre du dixième de micron (*). »
Benoit, *Rapport présenté par le Comité international des poids et mesures*, etc. Paris, Gauthier-Villars, 1889.

(*) Le dixième du micron vaut un dix-millième de millimètre.

Art. 2. — *Surfaces.*

§ 1. — Rectangles.

1. ***Définitions.*** — Si deux rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils peuvent se superposer exactement. Leurs surfaces sont ***égales.***

Si deux rectangles de même base ont des hauteurs inégales, celui qui a la hauteur la plus petite ne peut être superposé qu'à une partie de l'autre. Ces deux rectangles ont des surfaces ***inégales,*** et celui qui a la plus petite hauteur a aussi la surface la plus petite.

Si l'on juxtapose suivant une dimension commune deux rectangles égaux à un rectangle donné, on obtient un rectangle de surface double. En juxtaposant trois rectangles égaux, on obtient un rectangle de surface triple, et ainsi de suite. Étant donné un rectangle quelconque, on peut ainsi en imaginer un multiple quelconque.

2. ***Comparaison de deux rectangles ayant une dimension commune.*** — Soient deux rectangles $|R|$ et $|\mathcal{R}|$ ayant même base et des hauteurs $|L'|$ et $|\mathcal{L}'|$ différentes. Considérons un rectangle $|r|$ ayant pour base la base des deux précédents et pour hauteur une longueur $|l|$. Si cette dernière est inférieure à la fois à $|L'|$ et à $|\mathcal{L}'|$, il existe deux multiples consécutifs du rectangle $|r|$:

$$N\,|r|, \qquad |N+1|\,|r|$$

comprenant entre eux le rectangle $|R|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|r|, \qquad |\mathcal{N}+1|\,|r|$$

comprenant entre eux le rectangle $|\mathcal{R}|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que le rectangle $|r|$ est plus petit. Or, la petitesse de ce rectangle dépend de la petitesse de sa hauteur $|l|$. Si l'on suppose que cette hauteur et par suite le rectangle $|r|$ diminuent indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'un rectangle plus petit que |R| à un rectangle plus grand que |$\mathfrak{R}$|; le second est le rapport d'un rectangle plus grand que |R| à un rectangle plus petit que |$\mathfrak{R}$|. Plus le rectangle |r| est petit, plus les rectangles dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de |R| et de |$\mathfrak{R}$|. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des rectangles |R| et |$\mathfrak{R}$|.

Or, N et n représentant les plus grands nombres de fois que la longueur |l| est contenue respectivement dans les longueurs |L'| et |$\mathfrak{L}'$|, la limite en question est aussi le rapport de |L'| à |$\mathfrak{L}'$|.

Donc : *deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

3. *Comparaison de deux rectangles quelconques.* — Soient |R| et |$\mathfrak{R}$| deux rectangles ayant respectivement pour dimensions les lignes |L'|, |L''| d'une part, |$\mathfrak{L}'$|, |$\mathfrak{L}''$| d'autre part.

Concevons un rectangle |r_1| ayant pour base la base |L'| du premier et pour hauteur une ligne |l|, et un rectangle |r_2| ayant pour base la base |$\mathfrak{L}'$| du second et pour hauteur la même ligne |l| que le précédent. Si cette dernière est inférieure à la fois à |L''| et à |$\mathfrak{L}''$|, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|r_1|, \qquad (N+1)\,|r_1|$$

du rectangle |r_1| comprenant entre eux le rectangle |R|, et deux multiples consécutifs :

$$\mathfrak{N}\,|r_2|, \qquad (\mathfrak{N}+1)\,|r_2|$$

du rectangle |r_2| comprenant entre eux le rectangle |$\mathfrak{R}$|.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur |l| est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports

$$\frac{N\,|r_1|}{(\mathfrak{N}+1)\,|r_2|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|r_1|}{\mathfrak{N}\,|r_2|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Plus les rectangles $|r_1|$ et $|r_2|$ sont petits, plus les rectangles dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|R|$ et de $|\mathcal{R}|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des rectangles $|R|$ et $|\mathcal{R}|$.

Or, ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|r_1|}{|r_2|} \cdot \frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|r_1|}{|r_2|} \cdot \frac{N+1}{\mathcal{N}};$$

mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|r_1|}{|r_2|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}.$$

On a donc

$$\frac{|R|}{|\mathcal{R}|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|} \lim. \frac{N}{\mathcal{N}+1}.$$

Or, N et $\mathcal{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L'|$ et $|\mathcal{L}'|$; il suit de là que

$$\lim \frac{N}{\mathcal{N}+1} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|R|}{|\mathcal{R}|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|} \cdot \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}.$$

Le rapport de deux rectangles est égal au produit des rapports de leurs deux dimensions.

§ 2. — Surfaces planes quelconques.

Étant donnée une surface plane limitée par une ligne quelconque, on peut toujours définir un rectangle équivalent, les dimensions de ce rectangle étant certains multiples ou sous-multiples de deux dimensions de la figure à laquelle appartient cette surface. La comparaison de deux surfaces planes quelconques se ramène donc à la comparaison de deux rectangles.

Il en est de même des surfaces courbes, car l'aire d'une surface courbe est définie comme la limite de la somme des aires d'une série de surfaces planes.

Il est donc établi d'une manière générale que *la comparaison de deux surfaces est subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : deux longueurs dépendant de la première surface et deux longueurs dépendant de la seconde,* ce que nous exprimerons par la formule :

$$\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}.$$

De là il suit immédiatement que le rapport de deux surfaces semblables est égal au carré du rapport de similitude, et que si toutes les lignes d'une figure varient dans un rapport k, la surface varie dans le rapport k^2.

§ 3. — Exemples.

On apprend en géométrie à trouver dans chaque cas particulier les lignes qu'il convient de considérer pour obtenir le plus simplement possible le rapport de deux surfaces.

Voici quelques exemples les plus simples correspondant à divers cas usuels.

$|\mathfrak{S}|$ désignant la surface d'un carré de côté $|\mathfrak{L}|$, supposons que $|S|$ désigne successivement la surface :

1° D'un carré de côté $|L|$;

2° D'un rectangle de côtés $|L'|$, $|L''|$;

3° D'un cercle de circonférence $|C|$ et de rayon $|L|$;

4° D'une ellipse de demi-axes $|L'|$, $|L''|$.

On aura :

NATURE de LA SURFACE	COMPOSITION du RAPPORT	VALEUR numérique DU RAPPORT
$\|S\|$	$\frac{\|S\|}{\|\mathfrak{S}\|}$	$\frac{\|S\|}{\|\mathfrak{S}\|}$
1° Carré.	$\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|} \cdot \frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}$	$\frac{L^2}{\mathfrak{L}^2}$
2° Rectangle.	$\frac{\|L'\|}{\|\mathfrak{L}\|} \cdot \frac{\|L''\|}{\|\mathfrak{L}\|}$	$\frac{L'L''}{\mathfrak{L}^2}$
3° Cercle.	$\frac{\|\frac{1}{2}C\|}{\|\mathfrak{L}\|} \cdot \frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}$	$\pi\frac{L^2}{\mathfrak{L}^2}$
4° Ellipse.		$\pi\frac{L'L''}{\mathfrak{L}^2}$

Si $|\mathcal{S}|$ désignait la surface d'un cercle de rayon $|\mathcal{L}|$, on aurait :

NATURE de LA SURFACE $\|S\|$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\|S\|}{\|\mathcal{S}\|}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\|S\|}{\|\mathcal{S}\|}$
1° Carré.	$\frac{\|L\|}{\|\frac{1}{2}\mathcal{C}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
2° Rectangle.	$\frac{\|L'\|}{\|\frac{1}{2}\mathcal{C}\|}\cdot\frac{\|L''\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$
3° Cercle.	$\frac{\|C\|}{\|\mathcal{C}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
4° Ellipse.		$\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$

Art. 3. — *Volumes.*

§ 1. — Parallélipipèdes rectangles.

1. *Définitions.* — Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils peuvent se superposer exactement. Leurs volumes sont *égaux*.

Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs inégales, celui qui a la hauteur la plus petite ne peut être superposé qu'à une partie de l'autre. Ces deux parallélipipèdes ont des volumes ***inégaux***, et celui qui a la plus petite hauteur a le volume le plus petit.

Si l'on juxtapose suivant une face commune deux parallélipipèdes égaux à un parallélipipède rectangle donné, on obtient un parallélipipède de volume double. En juxtaposant trois parallélipipèdes rectangles égaux, on en obtient un volume triple, et ainsi de suite. — Étant donné un parallélipipède rectangle quelconque, on peut donc en imaginer un multiple quelconque.

2. *Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles ayant deux dimensions communes.* — Soient deux parallélipipèdes rectangles $|P_a|$, $|\mathcal{P}_a|$ ayant même base et des hauteurs $|L'|$, $|\mathcal{L}'|$

différentes. — Considérons un parallélipipède rectangle $|p_a|$ ayant pour base la base des deux précédents et pour hauteur une longueur $|l|$. Si cette dernière est inférieure à la fois à $|L'|$ et à $|\mathcal{L}'|$, il existe deux multiples consécutifs du parallélipipède $|p_a|$:

$$N\,|p_a|, \qquad (N+1)\,|p_a|,$$

comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|p_a|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|p_a|,$$

comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathcal{L}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que le parallélipipède $|p_a|$ est plus petit. Or, la petitesse de ce parallélipipède dépend de la petitesse de sa hauteur $|l|$. Si l'on suppose que cette hauteur et par suite le parallélipipède $|p_a|$ diminuent indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'un parallélipipède plus petit que $|P_a|$ à un parallélipipède plus grand que $|\mathcal{L}_a|$; le second est le rapport d'un parallélipipède plus grand que $|P_a|$ à un parallélipipède plus petit que $|\mathcal{L}_a|$. Plus le parallélipipède $|p_a|$ est petit, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathcal{L}_a|$. La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport de $|P_a|$ à $|\mathcal{L}_a|$.

Or, N et $\mathcal{N}$ représentant les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue dans les longueurs $|L'|$ et $|\mathcal{L}'|$, la limite en question est aussi le rapport de $|L'|$ à $|\mathcal{L}'|$.

Donc : *deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

3. *Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles ayant une seule dimension commune.* — Soient $|P_a|$ et $|\mathcal{L}_a|$ deux

parallélipipèdes rectangles ayant une dimension commune, que nous désignerons sous le nom de hauteur, les deux autres étant respectivement $|L'|$, $|L''|$ d'une part, $|\mathfrak{L}'|$, $|\mathfrak{L}''|$ d'autre part.

Concevons deux parallélipipèdes rectangles $|p_{a_1}|$, $|p_{a_2}|$ ayant pour hauteur la hauteur commune des deux parallélipipèdes donnés, et pour bases, l'un un rectangle de dimensions $|L'|$ et $|l|$, l'autre un rectangle de dimensions $|\mathfrak{L}'|$ et $|l|$. Si la ligne $|l|$ est inférieure à la fois à $|L''|$ et à $|\mathfrak{L}''|$, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|p_{a_1}|, \qquad |N+1|\,|p_{a_1}|$$

du parallélipipède $|p_{a_1}|$, comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$, et deux multiples consécutifs :

$$\mathfrak{N}\,|p_{a_2}|, \qquad |\mathfrak{N}+1|\,|p_{a_2}|$$

du parallélipipède $|p_{a_2}|$, comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathfrak{P}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports

$$\frac{N\,|p_{a_1}|}{(\mathfrak{N}+1)\,|p_{a_2}|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|p_{a_1}|}{\mathfrak{N}\,|p_{a_2}|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Plus les parallélipipèdes $|p_{a_1}|$ et $|p_{a_2}|$ sont petits, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathfrak{P}_a|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des parallélipipèdes $|P_a|$ et $|\mathfrak{P}_a|$.

Or, ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N+1}{\mathfrak{N}}.$$

Mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|};$$

on a donc

$$\frac{|P_a|}{|\mathcal{L}_a|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|} \lim \frac{N}{\mathcal{N} + 1}.$$

Or N et $\mathcal{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L''|$ et $|\mathcal{L}''|$; il suit de là que

$$\lim. \frac{N}{\mathcal{N} + 1} = \frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|P_a|}{|\mathcal{L}_a|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|}.$$

Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles ayant une dimension commune est égal au produit des rapports des deux autres dimensions.

4. ***Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles quelconques.*** — Soient $|P_a|$ et $|\mathcal{L}_a|$ deux parallélipipèdes rectangles ayant respectivement pour dimensions les lignes $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$ d'une part, $|\mathcal{L}'|$, $|\mathcal{L}''|$, $|\mathcal{L}'''|$ d'autre part.

Concevons deux parallélipipèdes rectangles $|p_{a_1}|$, $|p_{a_2}|$ ayant pour hauteur une ligne $|l|$ et pour bases l'un la base de $|P_a|$, l'autre la base de $|\mathcal{L}_a|$, dont les dimensions sont respectivement $|L'|$, $|L''|$ et $|\mathcal{L}'|$, $|\mathcal{L}''|$. Si la ligne $|l|$ est inférieure à la fois à $|L'''|$ et à $|\mathcal{L}'''|$, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|p_{a_1}|, \qquad (N + 1)\,|p_{a_1}|$$

du parallélipipède $|p_{a_1}|$ comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$ et deux multiples consécutifs :

$$\mathcal{N}\,|p_{a_2}|, \qquad (\mathcal{N} + 1)\,|p_{a_2}|$$

du parallélipipède $|p_{a_2}|$ comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathcal{L}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports :

$$\frac{N\,|p_{a_1}|}{(\mathcal{N}+1)\,|p_{a_2}|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|p_{a_1}|}{\mathcal{N}\,|p_{a_2}|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Plus les parallélipipèdes $|p_{a_1}|$ et $|p_{a_2}|$ sont petits, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathcal{L}_a|$. La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des parallélipipèdes $|P_a|$ et $|\mathcal{L}_a|$.

Or ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N+1}{\mathcal{N}}.$$

Mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}=\frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|};$$

on a donc

$$\frac{|P_a|}{|\mathcal{L}_a|}=\frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|}\lim\frac{N}{\mathcal{N}+1}.$$

Or N et $\mathcal{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L'''|$ et $|\mathcal{L}'''|$; il suit de là que

$$\lim\frac{N}{\mathcal{N}+1}=\frac{|L'''|}{|\mathcal{L}'''|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|P_a|}{|\mathcal{L}_a|}=\frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|}\cdot\frac{|L'''|}{|\mathcal{L}'''|}.$$

Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs trois dimensions.

§ 2. — Volumes quelconques.

Étant donné un volume limité par une figure quelconque, on peut toujours définir un parallélipipède équivalent, les

dimensions de ce parallélipipède étant certains multiples ou sous-multiples de trois dimensions de cette figure. La comparaison de deux volumes quelconques se ramène par suite à la comparaison de deux parallélipipèdes.

Il est donc établi d'une manière générale que ***la comparaison de deux volumes est subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : trois longueurs dépendant du premier volume et trois longueurs dépendant du second,*** ce qu'on peut exprimer par la formule

$$\frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|} \cdot \frac{|L'''|}{|\mathfrak{L}'''|}.$$

Il est évident d'après cela que le rapport des volumes de deux figures solides semblables est égal au cube du rapport de similitude, et que si toutes les lignes d'une figure solide varient dans un rapport k, le volume varie dans le rapport k^3.

§ 3. — Exemples.

$|\mathfrak{V}_0|$ désignant le volume d'un cube de côté $|\mathfrak{L}|$, supposons que $|V_0|$ désigne successivement le volume :

1° D'un cube de côté $|L|$;

2° D'un parallélipipède rectangle de côtés $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$;

3° D'une sphère de rayon $|L|$;

4° D'un ellipsoïde de rayons principaux $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$.

On aura :

NATURE du VOLUME $\lvert V_0\rvert$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathfrak{V}_0\rvert}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathfrak{V}_0\rvert}$
1° Cube.	$\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{L^3}{\mathfrak{L}^3}$
2° Parallélipipède.	$\frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L'''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{L' L'' L'''}{\mathfrak{L}^3}$
3° Sphère.	$\frac{4}{3}\pi \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{4}{3}\pi \frac{L^3}{\mathfrak{L}^3}$
4° Ellipsoïde.	$\frac{4}{3}\pi \frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L'''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{4}{3}\pi \frac{L' L'' L'''}{L^3}$

Si $|\mathcal{V}_0|$ désignait le volume d'une sphère de rayon $|\mathcal{L}|$, on aurait :

NATURE du VOLUME $\|V_0\|$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\|V_0\|}{\|\mathcal{V}_0\|}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\|V_0\|}{\|\mathcal{V}_0\|}$
1° Cube.	$\frac{3}{4\pi}\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{3}{4\pi}\frac{L^3}{\mathcal{L}^3}$ ·
2° Parallélipipède.	$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\|L'\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L''\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L'''\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{L'L''L'''}{\mathcal{L}^3}$
3° Sphère.	$\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{L^3}{\mathcal{L}^3}$
4° Ellipsoïde.	$\frac{\|L'\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L''\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L'''\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{L'.L''.L'''}{\mathcal{L}^3}$

Art. 4. — *Angles plans.*

1. ***Définition de l'égalité et de l'inégalité de deux angles*** — Soient $|O|$ et $|\mathcal{O}|$ deux angles donnés AOB et $\mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{B}$. Imaginons qu'on amène le sommet et le sens du premier à coïncider avec le sommet et le sens du second. — Trois cas peuvent se présenter : le côté OB peut se trouver entre $\mathcal{O}\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}\mathcal{B}$, ou en coïncidence avec $\mathcal{O}\mathcal{B}$ ou au delà de $\mathcal{O}\mathcal{B}$. L'angle AOB est dit : dans le premier cas ***inférieur,*** dans le second cas ***égal,*** dans le troisième cas ***supérieur*** à l'angle $\mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{B}$.

2. ***Multiples et sous-multiples d'un angle donné.*** — Un angle obtenu en rendant adjacents deux angles égaux à un angle donné est un angle ***double*** du premier. Un groupe de trois angles contigus égaux à un angle donné constitue un angle ***triple*** et ainsi de suite. Étant donné un angle quelconque on en concevra ainsi aisément un multiple quelconque.

3. ***Comparaison de deux angles quelconques.*** — Soient $|O|$ un premier angle interceptant un arc $|\mathbf{a}|$ dans un cercle de rayon $|L|$ ayant son centre au sommet, et $|\mathcal{O}|$ un deuxième angle interceptant un arc $|\mathcal{a}|$ dans un cercle de rayon $|\mathcal{L}|$ ayant son centre au sommet.

Considérons un angle $|o|$ inférieur à la fois à $|\mathrm{O}|$ et à $|\mathcal{O}|$. Il existe deux multiples consécutifs :

$$\mathrm{N}\,|o|, \qquad (\mathrm{N}+1)\,|o|$$

de cet angle, comprenant entre eux l'angle $|\mathrm{O}|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|o|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|o|$$

comprenant entre eux l'angle $|\mathcal{O}|$.

Plus l'angle $|o|$ est petit, plus les nombres

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{N}+1}{\mathcal{N}}$$

sont voisins l'un de l'autre. Ils ont une limite commune qu'on appelle le rapport de l'angle $|\mathrm{O}|$ à l'angle $|\mathcal{O}|$.

Pour trouver cette limite, désignons par $|\mathrm{a}|$ l'arc correspondant à l'angle $|o|$ dans le cercle de rayon $|\mathrm{L}|$ et par $|a|$ l'arc correspondant à ce même angle dans le cercle de rayon $|\mathcal{L}|$. Quelle que soit la grandeur de l'angle $|o|$, le rapport $\frac{|\mathrm{a}|}{|a|}$ a la valeur $\frac{|\mathrm{L}|}{|\mathcal{L}|}$.

Les arcs $|\mathbf{a}|$ et $|\mathcal{A}|$ sont respectivement compris entre les multiples

$$\mathrm{N}\,|\mathrm{a}|, \qquad (\mathrm{N}+1)\,|\mathrm{a}| \qquad \text{de} \qquad |\mathrm{a}|$$

et

$$\mathcal{N}\,|a|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|a| \qquad \text{de} \qquad |a|.$$

Les rapports

$$\frac{\mathrm{N}\,|\mathrm{a}|}{(\mathcal{N}+1)\,|a|} \quad \text{et} \quad \frac{(\mathrm{N}+1)\,|\mathrm{a}|}{\mathcal{N}\,|a|},$$

équivalents respectivement à

$$\frac{|\mathrm{L}|}{|\mathcal{L}|}\cdot\frac{\mathrm{N}}{(\mathcal{N}+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathcal{L}}\cdot\frac{(\mathrm{N}+1)}{\mathcal{N}},$$

ont, lorsque $|o|$ diminue indéfiniment, une commune limite représentant le rapport

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathcal{A}|}.$$

On a donc

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|} \lim . \frac{N}{\mathfrak{N} + 1} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|};$$

d'où

$$\lim \frac{N}{\mathfrak{N} + 1} = \frac{|0|}{|\mathfrak{O}|} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|} \frac{|\mathfrak{L}|}{|L|} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|} \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux angles est donc subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : d'une part, les arcs correspondant à ces angles sur des circonférences décrites des sommets, et, d'autre part, les rayons de ces circonférences.

Le calcul de la valeur numérique du rapport de deux angles, à l'aide des valeurs numériques de ces arcs et de ces rayons, se fera suivant la formule

$$\frac{|0|}{|\mathfrak{O}|} = \frac{a}{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\mathfrak{L}}{L} = \frac{\frac{a}{L}}{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{L}}}.$$

Art. 5. — *Angles solides.*

Par un raisonnement analogue au précédent et où, au lieu d'angles plans il s'agit d'angles solides, on établirait que :

La comparaison de deux angles solides est subordonnée à une comparaison de surfaces, savoir : d'une part, les surfaces interceptées par ces angles sur des sphères ayant leurs centres au sommet et, d'autre part, les carrés ayant pour côtés les rayons de ces sphères.

En désignant par $|\Omega|$ un angle solide découpant une surface $|S|$ sur une sphère de rayon $|L|$ ayant son centre au sommet, par $|\mathfrak{\Omega}|$ un autre angle solide découpant une surface $|\mathfrak{S}|$ sur une sphère de rayon $|\mathfrak{L}|$ ayant son centre au sommet, on aura, d'après cela,

$$\frac{|\Omega|}{|\mathfrak{\Omega}|} = \left(\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{|L|}\right)^2 = \left(\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}\right)\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-2}.$$

Le calcul de la valeur numérique du rapport de deux angles solides, à l'aide des valeurs numériques de ces surfaces et des rayons des sphères, se fera suivant la formule

$$\frac{|\Omega|}{|\mathfrak{Q}|}=\frac{S}{\mathcal{S}}\cdot\frac{\mathcal{L}^2}{L^2}=\frac{\frac{S}{L^2}}{\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{L}^2}}.$$

Art. 6. — *Courbure des lignes.*

La circonférence d'un cercle est une courbe telle que la tangente en un point tourne d'angles égaux quand ce point parcourt sur la courbe des arcs égaux quelconques. En raison de cette propriété, on dit que la circonférence est une courbe présentant une ***flexion*** ou une ***courbure*** uniforme.

Sur des circonférences de rayons différents, à des arcs de longueurs égales correspondent des angles inégaux et inversement à des angles égaux correspondent des arcs de longueurs inégales. Des circonférences de rayons différents ont par suite des courbures inégales.

La courbure d'une circonférence est d'autant plus grande que l'angle de deux tangentes est plus grand pour une moindre distance des points de contact.

Le rapport des courbures de deux circonférences est le rapport des deux angles correspondant sur ces circonférences à des arcs égaux.

Soient $|O|$ l'angle de deux tangentes et $|\mathbf{a}|$ l'arc correspondant dans une circonférence de rayon $|L|$. Soient, d'autre part, $|\mathcal{O}|$ l'angle de deux tangentes et $|\mathfrak{a}|$ l'arc correspondant dans une circonférence de rayon $|\mathcal{L}|$. Le rapport des courbures de ces deux circonférences est, par définition,

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|}=\left(\frac{|O|}{|\mathcal{O}|}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{a}}\right).$$

Si l'on tient compte de la formule

$$\frac{|O|}{|\mathcal{O}|}=\left(\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathfrak{a}|}\right)\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1},$$

on obtient

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|} = \frac{|\mathcal{L}|}{|L|}.$$

Donc : ***le rapport des courbures de deux circonférences est égal à l'inverse du rapport de leurs rayons.***

La valeur numérique de ce rapport se calculera à l'aide des valeurs numériques des rayons suivant la formule

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|} = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{\mathcal{L}}}.$$

La courbure d'une courbe quelconque en un point étant définie comme celle du cercle osculateur en ce point, la comparaison des courbures de deux courbes quelconques se ramène à la comparaison des courbures de deux circonférences

CHAPITRE IV

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs cinématiques.

Art. 1. — *Temps.*

Pour qu'un phénomène se produise, il faut le concours de certaines circonstances qui en sont les conditions nécessaires et suffisantes. Si après s'être présentées une première fois les circonstances déterminantes d'un phénomène se présentaient une seconde fois identiques à elles-mêmes, elles donneraient lieu à un second phénomène identique au premier à tous les points de vue. En particulier les deux phénomènes auraient la même durée, et si le second succédait au premier sans interruption, la durée de leur ensemble serait double de celle

du premier. On concevrait de même une durée triple, quadruple, multiple quelconque de la première.

Comme exemples de séries d'événements pratiquement identiques servant à établir des divisions dans le temps, on peut citer : la série des révolutions de la terre sur elle-même, la série des vibrations d'un diapason, etc.

Un intervalle de temps présentant ainsi tous les caractères d'une quantité, le rapport de deux intervalles de temps quelconques se définit par des considérations tout à fait analogues à celles qui nous ont permis de définir le rapport de deux longueurs.

Art. 2. — *Vitesses.*

L'idée de vitesse est suggérée par la considération d'un mouvement rectiligne uniforme. — La ***vitesse*** est la qualité qui distingue un mouvement uniforme d'un autre mouvement uniforme.

Pour comparer deux mouvements uniformes il ne suffit pas de comparer les espaces parcourus par les mobiles qui en sont animés, il faut aussi avoir égard aux temps correspondants. Les vitesses de ces mouvements sont, par définition, en raison directe des espaces parcourus et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|V_i|$ la vitesse d'un mobile parcourant d'un mouvement uniforme une longueur $|L|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{V}_i|$ la vitesse d'un mobile parcourant, également d'un mouvement uniforme, une longueur $|\mathfrak{L}|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport de ces deux vitesses est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|}\right) = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de la valeur numérique de ce rapport à l'aide des valeurs numériques des longueurs et des temps considérés se fera suivant la formule :

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}=\frac{L}{\mathfrak{L}}\cdot\frac{\mathfrak{T}}{T}=\frac{LT^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}}=\frac{\frac{L}{T}}{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}}.$$

Dans un mouvement varié on appelle vitesse à un instant donné la vitesse moyenne avec laquelle le mobile parcourt un élément infiniment petit de sa trajectoire à partir de cet instant.

Soient $|dL|$ l'élément de trajectoire et $|dT|$ le temps employé à le parcourir, on a, d'après cette définition, pour la valeur numérique du rapport de cette vitesse à la vitesse $|\mathfrak{V}_i|$ d'un mouvement uniforme l'expression :

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}=\frac{\frac{dL}{dT}}{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}}.$$

ART. 3. — *Vitesses angulaires.*

Supposons que dans le plan d'un angle l'un des côtés tourne autour du sommet d'un mouvement continu : on dit que ce côté est animé d'un *mouvement angulaire.*

Si l'angle compris entre le côté fixe et le côté mobile varie de quantités égales dans des temps égaux quelconques, on dit que le mouvement angulaire est *uniforme.*

La *vitesse angulaire* est la qualité qui distingue un mouvement angulaire uniforme d'un autre mouvement angulaire uniforme.

Pour comparer deux semblables mouvements, il ne suffit pas de comparer les angles décrits par les côtés mobiles, il faut aussi avoir égard aux temps correspondants.

Le rapport de deux vitesses angulaires est en raison directe des angles parcourus et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|V_a|$ la vitesse angulaire d'une droite décrivant d'un mouvement uniforme un angle $|O|$ en un temps $|T|$. Soit,

d'autre part, $|\mathfrak{V}_a|$ la vitesse angulaire d'une droite décrivant d'un mouvement uniforme un angle $|\Theta|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport des vitesses angulaires de ces deux mouvements est, d'après la définition précédente,

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \left(\frac{|O|}{|\Theta|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|}\right) = \left(\frac{|O|}{|\Theta|}\right)\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de sa valeur numérique à l'aide des valeurs numériques O, T, Θ, $\mathfrak{T}$, peut se représenter par les formules

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \frac{O}{\Theta}\cdot\frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{OT^{-1}}{\Theta\mathfrak{T}^{-1}} = \frac{\frac{O}{T}}{\frac{\Theta}{\mathfrak{T}}}.$$

Dans un mouvement angulaire varié on appelle vitesse angulaire à un instant donné la vitesse angulaire moyenne avec laquelle la droite mobile décrit un angle infiniment petit à partir de cet instant. Soient $d(O)$ un élément d'angle et $d(T)$ le temps employé à le parcourir, on a, d'après cette définition, pour la valeur numérique du rapport de cette vitesse angulaire à la vitesse $|\mathfrak{V}_a|$ d'un mouvement angulaire uniforme l'expression :

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \frac{\frac{dO}{dT}}{\frac{\Theta}{\mathfrak{T}}}.$$

De pareilles considérations sont applicables au mouvement d'un plan autour d'un axe constitué par une de ses droites.

ART. 4. — *Accélérations.*

Un mouvement rectiligne dans lequel la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux est le plus simple des mouvements non uniformes.

Un pareil mouvement, auquel on donne le nom de mouvement ***uniformément varié,*** se distingue d'un autre de même

nature par ce qu'on pourrait appeler le « taux » de la variation de vitesse, c'est-à-dire par la valeur de la variation de la vitesse pendant un temps donné. — On donne à cette grandeur le nom d'***accélération***.

Les accélérations de deux mouvements uniformément variés sont donc en raison directe des variations de vitesse et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|A|$ l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément varié dont la vitesse varie de $|\Delta V_i|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathcal{A}|$ l'accélération d'un autre mobile animé d'un mouvement de même nature dont la vitesse varie de $|\Delta \mathcal{V}_i|$ en un temps $|\mathcal{T}|$. Le rapport des deux accélérations est, par définition,

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|\Delta V_i|}{|\Delta \mathcal{V}_i|} \cdot \frac{|\mathcal{T}|}{|T|} = \frac{|\Delta V_i|}{|\Delta \mathcal{V}_i|} \cdot \left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de la valeur numérique de ce rapport à l'aide des valeurs numériques ΔV, T, $\Delta \mathcal{V}$, $\mathcal{T}$ se fera suivant la formule

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{\Delta V_i}{\Delta \mathcal{V}_i} \cdot \frac{\mathcal{T}}{T} = \frac{\dfrac{\Delta V_i}{T}}{\dfrac{\Delta \mathcal{V}_i}{\mathcal{T}}}.$$

Dans un mouvement varié quelconque, on appelle accélération à un instant donné l'accélération moyenne que possède le mobile pendant qu'il décrit un élément infiniment petit de sa trajectoire à partir de cet instant.

Soit $|dV_i|$ la variation de la vitesse pendant le temps $|dT|$ qui suit l'instant considéré; on aura, d'après la définition précédente, pour la valeur numérique du rapport de l'accélération du mobile considéré à l'accélération $|\mathcal{A}|$ relative à un mouvement uniformément accéléré servant de terme de comparaison, l'expression :

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{\dfrac{dV_i}{dT}}{\dfrac{\Delta \mathcal{V}_i}{\mathcal{T}}}.$$

La variation de la vitesse d'un mobile ou la différence $V'_i - V_i$ des vitesses du mobile à deux instants est une vitesse, si l'on considère le mouvement du mobile relativement à un système animé de la vitesse V_i, de sorte que le rapport de deux variations de vitesses doit être considéré comme un rapport de vitesses. Il résulte donc de ce qui précède que *la comparaison de deux accélérations est subordonnée à une comparaison de vitesses et à une comparaison de temps :*

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|V_i|}{|\mathcal{V}_i|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-1};$$

mais, eu égard au résultat trouvé pour la comparaison de deux vitesses :

$$\frac{|V_i|}{|\mathcal{V}_i|} = \frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-1},$$

elle est, en dernière analyse, subordonnée à une comparaison de longueurs et à une comparaison de temps :

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-2}.$$

CHAPITRE V

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs dynamiques.

Art. 1. — *Forces.*

Si deux forces sollicitant un même point, d'ailleurs soustrait à toute autre influence, suivant les deux directions opposées d'une même droite, laissent ce point en repos, on dit qu'elles sont *égales*.

Si une force $|F|$ appliquée à un point entièrement libre d'obéir à son action produit le même effet que n forces égales

à une force $|\mathcal{F}|$ qui solliciteraient en commun ce point dans la même direction, ou bien si une force $|F|$ est tenue en équilibre par n forces égales à $|\mathcal{F}|$ agissant en même temps dans une direction opposée, elle est dite n fois plus grande que $|\mathcal{F}|$.

En raisonnant sur les intensités de deux forces comme nous l'avons fait sur les longueurs de deux lignes, on définit ce qu'on doit entendre dans le sens le plus général par ***rapport*** de deux forces.

Art. 2. — *Moments.*

On nomme ***couple*** l'ensemble de deux forces égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point.

Il est impossible de trouver une force unique produisant sur un corps le même effet qu'un couple. Un couple n'est donc pas comparable à une force, et ne peut être comparé qu'à un couple.

Un couple peut être équilibré par un autre couple.

Deux couples de sens contraires dont les plans sont parallèles se font équilibre si le rapport de leurs forces est égal à l'inverse du rapport de leurs bras de leviers. On dit que ces deux couples ont des ***moments*** égaux.

Si le rapport des forces de deux couples est égal à n fois le rapport inverse des bras de leviers, il faut n couples équivalents au second pour équilibrer le premier. On dit que le moment du premier couple vaut n fois le moment du second.

D'une manière générale, le rapport des moments de deux couples est égal au produit du rapport des forces par le rapport des bras de leviers.

Soient $|M_0|$ et $|\mathcal{M}_0|$ les moments de deux couples dont les forces et les bras de leviers sont respectivement $|F|$, $|L|$, $|\mathcal{F}|$, $|\mathcal{L}|$. On a, par définition,

$$\frac{|M_0|}{|\mathcal{M}_0|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathcal{L}|}.$$

La valeur numérique de ce rapport se calculera à l'aide des

valeurs numériques des forces et des bras de leviers suivant la formule

$$\frac{|M_0|}{|\mathfrak{M}_0|} = \frac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}.$$

ART. 3. — *Travaux.*

Soit une force $|\mathfrak{F}|$ constante en grandeur et en direction déplaçant son point d'application d'une longueur $|\mathfrak{L}|$ dans sa propre direction, on dit que cette force effectue un *travail.*

La grandeur de ce travail est définie comme proportionnelle à la fois à l'intensité de la force et à la longueur du déplacement.

Si le point d'application parcourt une ligne droite dont la direction est différente de celle de la force, on appelle travail de cette force le travail de sa composante suivant la direction du déplacement.

Si le point d'application décrit une trajectoire quelconque, on nomme *travail élémentaire* de la force le travail correspondant au déplacement du point sur un élément de la trajectoire, et *travail total* correspondant à un parcours donné du point d'application la somme des travaux élémentaires relatifs aux différents éléments de ce parcours.

Le travail d'une force placée dans les conditions simples où nous avons supposé la force $|\mathfrak{F}|$ est pris comme terme de comparaison pour l'évaluation des travaux des forces dans tous les cas possibles.

La comparaison des travaux de deux forces est, de même que la comparaison de deux moments, subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs.

Ainsi, soit $|\Delta L|$ le déplacement d'un point d'application; soit $|F|$ la projection de la force suivant ce déplacement; le rapport du travail $|\Delta W|$ de cette force au travail $|\mathfrak{W}|$ de la force $|\mathfrak{F}|$ considérée tout à l'heure sera donné par l'expression :

$$\frac{|\Delta W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\frac{|\Delta L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La valeur numérique de ce rapport se calculera, à l'aide des valeurs numériques des forces et des déplacements, suivant la formule

$$\frac{|\Delta W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{F.\Delta L}{\mathfrak{F}.\mathfrak{L}}.$$

Art. 4. — *Puissances mécaniques.*

Pour juger de ce qu'on appelle la *puissance* d'un moteur, il faut avoir égard non seulement au travail produit, mais encore au temps employé à le produire. Un moteur est regardé comme d'autant plus puissant qu'il produit plus de travail en moins de temps.

Le rapport des puissances mécaniques de deux moteurs est, par définition, en raison directe du rapport des travaux produits et en raison inverse des temps correspondants.

Ainsi soit $|P_m|$ la puissance d'un moteur qui produit un travail $|W|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{P}_m|$ la puissance d'un autre moteur qui produit un travail $|\mathfrak{W}|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport de ces deux puissances sera donné par l'expression :

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Mais

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\cdot\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|};$$

donc

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\cdot\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux puissances mécaniques est subordonnée à la comparaison de deux travaux et de deux temps, et, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

Art. 5. — *Intensités de pressions.*

Une surface plane est dite uniformément pressée lorsque les

pressions agissant sur des parties égales quelconques de cette surface sont égales.

L'état d'une surface uniformément pressée diffère de celui d'une autre surface uniformément pressée par ce qu'on nomme l'***intensité de la pression*** ou, d'une manière abrégée, la ***pression***.

Le rapport des ***pressions*** de deux surfaces uniformément pressées est égal au rapport des forces qui s'exercent normalement sur des aires égales appartenant à ces deux surfaces.

Soient $|F|$ et $|\mathfrak{F}|$ les forces s'exerçant respectivement sur des aires $|S|$ et $|\mathfrak{S}|$ de deux surfaces. Le rapport des pressions $|P|$ et $|\mathfrak{P}|$ auxquelles sont soumises ces surfaces est, en vertu de la définition précédente, donné par l'expression :

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\,\frac{|\mathfrak{S}|}{|S|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\left(\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}\right)^{-1}.$$

Mais on a

$$\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{2}.$$

Donc

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-2}.$$

La comparaison de deux pressions est subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison de surfaces, ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs.

Si une surface n'est pas uniformément pressée, on appelle ***pression en un point*** la pression moyenne à laquelle est soumis un élément de surface comprenant ce point. — Soit $|dF|$ la force agissant sur cet élément de surface $|dS|$; la valeur numérique du rapport de la pression $|P|$ au point considéré à la pression $|\mathfrak{P}|$ servant de terme de comparaison sera donnée par la formule

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{\dfrac{dF}{dS}}{\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{S}}}.$$

Art. 6. — *Poids spécifiques.*

Dans un corps homogène, les poids de parties quelconques d'égal volume sont égaux.

Pour trouver dans l'action de la pesanteur sur un corps homogène une donnée spécifique, c'est-à-dire caractéristique de ce corps, il faut avoir égard non seulement au poids de ce corps, mais encore à son volume.

On dit qu'un corps a un *poids spécifique* d'autant plus considérable qu'il a eu un plus grand poids sous un plus petit volume. La grandeur de ce poids spécifique est définie comme proportionnelle au poids du corps et en raison inverse du volume correspondant.

Le rapport des poids spécifiques de deux corps homogènes est donc en raison directe du rapport des poids de ces corps et en raison inverse du rapport de leurs volumes.

Soient $|F|$ et $|\mathfrak{F}|$ les poids de deux corps homogènes dont les volumes sont respectivement $|V_o|$ et $|\mathfrak{V}_o|$. Le rapport des poids spécifiques de ces deux corps sera donné par l'expression :

$$\frac{|P_s|}{|\mathfrak{P}_s|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \cdot \frac{|\mathfrak{V}_o|}{|V_o|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \left(\frac{|V_o|}{|\mathfrak{V}_o|}\right)^{-1}.$$

Or, soient $|L|$ et $|\mathfrak{L}|$ les côtés des cubes équivalents à $|V_o|$ et à $|\mathfrak{V}_o|$; on a

$$\frac{|V_o|}{|\mathfrak{V}_o|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^3;$$

donc

$$\frac{|P_s|}{|\mathfrak{P}_s|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-3}.$$

La comparaison de deux poids spécifiques est subordonnée à des comparaisons de forces et de volumes et, en dernière analyse, à des comparaisons de forces et de longueurs.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|P_s|}{|\mathfrak{P}_s|}$ se fera,

à l'aide des valeurs numériques des forces et des longueurs considérées suivant la formule

$$\frac{|P_s|}{|\mathcal{P}_s|} = \frac{\frac{F}{L^3}}{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{L}^3}}.$$

Art. 7. — *Masses.*

1. *Définitions.* — Si une même force appliquée successivement, dans les mêmes circonstances, à différents mobiles leur imprime des mouvements différents, on dit que ces mobiles ont des *masses* différentes.

Deux masses sont dites *égales* si, sollicitées par une même force dans les mêmes circonstances, elles prennent des mouvements identiques.

La réunion de *n* masses identiques à une masse donnée constitue une masse *n* fois plus grande que la première.

Une masse offre donc tous les caractères d'une quantité. L'égalité et l'addition étant définies, un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut à propos des longueurs permet de définir le rapport de deux masses quelconques.

2. *Comparaison des masses à l'aide des forces.* — Aucun désaccord entre la théorie et l'expérience n'est venu démontrer jusqu'ici qu'on ait eu tort d'admettre au nombre des principes de la dynamique :

1° Que la masse d'un corps peut être envisagée comme un groupe de masses indépendantes $|\mu|$ respectivement égales à ses parties aliquotes;

2° Qu'il revient au même de considérer chacune de ces masses $|\mu|$ comme sollicitée par une force $|\varphi|$, ou bien le corps de masse N $|\mu|$ qu'elles constituent comme sollicité par une force N $|\varphi|$ appliquée à son centre de gravité.

Il résulte de ces suppositions qu'un corps de masse N $|\mu|$ sollicité par une force N $|\varphi|$ prend le même mouvement qu'un

corps de masse $|\mu|$ sollicité par une force $|\varphi|$, ou, en termes généraux, que *deux corps dont les masses sont entre elles dans un certain rapport prennent des mouvements identiques si les forces qui les sollicitent sont entre elles dans ce même rapport.*

Et réciproquement : *Si deux corps de masses différentes prennent des mouvements identiques sous l'action de deux forces, les masses de ces deux corps sont entre elles dans le même rapport que ces forces.*

Deux corps différents prennent en un même lieu, sous l'action de la pesanteur, des mouvements identiques. Donc, en vertu de la proposition précédente, les masses de deux corps sont entre elles comme leurs poids en un même lieu. Soient $|M|$ et $|\mathcal{M}|$ les masses de deux corps dont les poids en un même lieu sont respectivement $|P_0|$ et $|\mathcal{P}_0|$; on a

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|} = \frac{|P_0|}{|\mathcal{P}_0|}.$$

Les comparaisons de masses peuvent donc se faire avec la balance.

Diverses forces constantes agissant successivement sur une même masse partant du repos lui communiquent des accélérations différentes. — La machine d'Atwood permet d'établir que le rapport des accélérations est égal au rapport des forces.

Cette relation, jointe à la proposition précédente, permet de comparer entre elles les masses de deux corps différents à l'aide des effets produits sur ces corps par des forces constantes différentes.

Soient $|A|$ et $|\mathcal{A}|$ les accélérations communiquées par des forces constantes $|F|$ et $|\mathcal{F}|$ à des masses $|M|$ et $|\mathcal{M}|$. — Le rapport des forces sollicitant des masses égales dans ces deux corps est

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \cdot \frac{|\mathcal{M}|}{|M|}.$$

D'après la proposition précédente, ce rapport est égal au

rapport des accélérations acquises par ces masses, lequel n'est autre que $\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}$. On a donc

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\,\frac{|\mathcal{M}|}{|M|}=\frac{|A|}{|\mathcal{A}|};$$

d'où

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\cdot\frac{|\mathcal{A}|}{|A|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}\right)^{-1}.$$

Mais on a vu que

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}=\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-2};$$

donc

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{2}.$$

La comparaison de deux masses est subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison d'accélérations, ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces, à une comparaison de longueurs et à une comparaison de temps.

Ainsi, quand on détermine le rapport de deux masses à l'aide de la balance, on s'appuie sur une comparaison de poids, c'est-à-dire de forces, et sur une comparaison d'accélérations, savoir la constatation de l'égalité des accélérations communiquées en un même lieu par la pesanteur à ces deux corps.

ART. 8. — *Densités.*

On dit qu'un corps a une ***densité uniforme*** lorsque les masses de parties égales quelconques de ce corps sont égales.

Le rapport des densités de deux corps de densités uniformes est égal au rapport des masses de volumes égaux de ces corps.

Soient $|M|$ et $|\mathcal{M}|$ les masses correspondant dans ces corps à des volumes $|V_0|$ et $|\mathcal{V}_0|$. Le rapport des densités $|D|$ et $|\mathcal{D}|$ de ces corps sera, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|D|}{|\mathcal{D}|}=\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\,\frac{|\mathcal{V}_0|}{|V_0|}=\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\left(\frac{|V_0|}{|\mathcal{V}_0|}\right)^{-1}.$$

Mais on a

$$\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{2}$$

et

$$\frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|} = \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{3};$$

donc

$$\frac{|D|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-4}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{2}.$$

La comparaison de deux densités est subordonnée à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux volumes, ou, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

Si un corps n'a pas une densité uniforme, on appelle ***densité en un point*** la densité moyenne d'un élément de volume comprenant ce point.

Soit $|dM|$ la masse correspondant à l'élément de volume $|dV_0|$ comprenant le point considéré. La valeur numérique du rapport de la densité $|D|$ en ce point à la densité $|\mathfrak{D}|$ d'un corps homogène pris pour terme de comparaison se calculera suivant la formule

$$\frac{|D|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{\dfrac{dM}{dV_0}}{\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{V}_0}}.$$

Art. 9. — *Moments d'inertie.*

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est le même que celui d'une masse égale à la masse du corps qui serait situé à une certaine distance de l'axe dépendant de la forme et de la position du corps et qu'on nomme ***rayon de giration*** de ce corps.

Soient $|M|$ et $|\mathfrak{M}|$ les masses de deux corps dont les rayons de giration sont respectivement $|L|$ et $|\mathcal{L}|$. Le rapport des

moments d'inertie $|K|$ et $|\mathfrak{K}|$ de ces deux corps sera, par définition,

$$\frac{|K|}{|\mathfrak{K}|} = \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|}\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^2$$

ou

$$\frac{|K|}{|\mathfrak{K}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^2.$$

La comparaison de deux moments d'inertie est donc subordonnée à la comparaison de deux masses et à la comparaison de deux longueurs, ou, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

Art. 10. — *Quantités de mouvement.*

Lorsqu'un point matériel est animé d'une certaine vitesse, on dit qu'il possède une certaine *quantité de mouvement,* dont la grandeur est définie comme proportionnelle à la fois à la masse et à la vitesse.

Si $|V_i|$ et $|\mathfrak{V}_i|$ sont respectivement les vitesses que possèdent à un certain instant des masses $|M|$ et $|\mathfrak{M}|$, le rapport des quantités de mouvement de ces masses à cet instant sera, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|Q_m|}{|\mathfrak{Q}_m|} = \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|}\cdot\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|}$ et $\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}$ par leurs expressions,

$$\frac{|Q_m|}{|\mathfrak{Q}_m|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\cdot\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}.$$

La comparaison de deux quantités de mouvement est subordonnée à la comparaison de deux masses et à la comparaison de deux vitesses, ou, en dernière analyse, à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux temps.

Art. 11. — *Forces vives.*

Lorsqu'un point matériel est animé d'une certaine vitesse, on dit qu'il possède une certaine ***énergie cinétique*** ou une certaine ***force vive*** dont la grandeur est définie comme proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse.

Si $|V_i|$ et $|\mathfrak{V}_i|$ sont respectivement les vitesses que possèdent à un certain instant les masses $|M|$ et $|\mathfrak{M}|$, le rapport des forces vives de ces masses à cet instant est, par définition,

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} \cdot \left(\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}\right)^2$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|}$ et $\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}$ par leurs expressions,

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La comparaison de deux forces vives est subordonnée à une comparaison de masses et à une comparaison de vitesses ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs, exactement comme la comparaison de deux travaux.

CHAPITRE VI

Formule générale relative à la comparaison des principales grandeurs géométriques et mécaniques. — Tableau des cas particuliers.

Toutes les propositions établies dans les trois chapitres précédents peuvent être rassemblées dans l'énoncé général suivant :

La comparaison de deux grandeurs géométriques ou

mécaniques de même espèce $|G|$ *et* $|\mathfrak{G}|$ *est subordonnée en général à des comparaisons de longueurs, de temps et de forces, ces quantités se rapportant aux grandeurs en question et servant à les spécifier.*

Le symbole général des opérations à faire pour obtenir la valeur du rapport $\frac{|G|}{|\mathfrak{G}|}$ *est*

$$\frac{|G|}{|\mathfrak{G}|} = h\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\lambda}\left(\frac{|L_0|}{|\mathfrak{L}_0|}\right)^{-\lambda_0}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{\tau}\left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)^{\varphi}.$$

Il indique que pour avoir le nombre $\frac{|G|}{|\mathfrak{G}|}$ *il faut multiplier un certain coefficient h par* λ *rapports de longueurs,* τ *rapports de temps,* φ *rapports de forces, et le diviser par* λ_0 *rapports de longueurs.*

Passons, en effet, en revue les différentes formules établies précédemment; nous verrons qu'elles rentrent toutes dans ce type général, pourvu qu'on considère λ, λ_0, τ, φ comme pouvant recevoir, suivant les cas, des valeurs positives, nulles ou négatives.

NATURE des GRANDEURS	COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS
I. Longueurs.	$\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}$	$\frac{L}{\mathfrak{L}}$
Surfaces.	$h\left(\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}\right)^2$	$h\frac{L^2}{\mathfrak{L}^2}$
Volumes.	$h\left(\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}\right)^3$	$h\frac{L^3}{\mathfrak{L}^3}$
Angles plans.	$\left(\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}\right)\left(\frac{\vert L_0\vert}{\vert\mathfrak{L}_0\vert}\right)^{-1}$	$\frac{L L_0^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_0^{-1}}$
Angles solides.	$\left(\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}\right)^2\left(\frac{\vert L_0\vert}{\vert\mathfrak{L}_0\vert}\right)^{-2}$	$\frac{L^2 L_0^{-2}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{L}_0^{-2}}$
Courbures.	$\left(\frac{\vert L\vert}{\vert\mathfrak{L}\vert}\right)^{-1}$	$\frac{L^{-1}}{\mathfrak{L}^{-1}}$

II. Temps.	$\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}$	$\frac{T}{\mathfrak{T}}$
Vitesses.	$\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{-1}$	$\frac{LT^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}}$
Vitesses angulaires.	$\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)\left(\frac{\|L_0\|}{\|\mathfrak{L}_0\|}\right)^{-1}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{-1}$	$\frac{LL_0^{-1}T^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_0^{-1}\mathfrak{T}^{-1}}$
Accélérations.	$\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{LT^{-2}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-2}}$
III. Forces.	$\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}$	$\frac{F}{\mathfrak{F}}$
Moments.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)$	$\frac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$
Travaux.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)$	$\frac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$
Puissances mécaniques.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{-1}$	$\frac{FLT^{-1}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}}$
Pressions.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)^{-2}$	$\frac{FL^{-2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-2}}$
Poids spécifiques.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)^{-3}$	$\frac{FL^{-3}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-3}}$
Masses.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)^{-1}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{2}$	$\frac{FL^{-1}T^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{T}^{2}}$
Densités.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)^{-4}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{2}$	$\frac{FL^{-4}T^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-4}\mathfrak{T}^{2}}$
Moments d'inertie.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)^{2}$	$\frac{FLT^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{2}}$
Quantités de mouvement.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|T\|}{\|\mathfrak{T}\|}\right)$	$\frac{FT}{\mathfrak{F}\mathfrak{T}}$
Forces vives.	$\left(\frac{\|F\|}{\|\mathfrak{F}\|}\right)\left(\frac{\|L\|}{\|\mathfrak{L}\|}\right)$	$\frac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$

On peut remarquer que λ_0 n'est différent de zéro que dans les seuls rapports où interviennent des angles. La grande majorité des formules précédentes correspond donc au type :

$$h\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\lambda}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{\tau}\left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)^{\varphi}.$$

CHAPITRE VII

Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées. — Dimensions.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que, soit isolément, soit par groupes de deux ou de trois, trois sortes de grandeurs, et trois seulement, interviennent nécessairement dans les expressions des rapports de toutes les grandeurs géométriques ou mécaniques.

Ces trois grandeurs : *longueur, temps, force,* à la comparaison desquelles les comparaisons de toutes les autres sont essentiellement subordonnées, méritent, à ce point de vue, d'être appelées *fondamentales*. Aussi désignerons-nous les unités servant à leur évaluation sous le nom d'unités *fondamentales*.

Par opposition, les autres grandeurs seront appelées des grandeurs *dérivées*.

Cette dernière expression ne doit pas être prise à la lettre. On ne saurait dire que des choses d'essences différentes dérivent les unes des autres. Par ce mot « dérivées » on doit entendre simplement que la grandeur à laquelle il s'applique est telle que l'expression de son rapport à une grandeur de même espèce se *déduit* de certains rapports de grandeurs fondamentales.

Deux grandeurs de même espèce dépendent des mêmes grandeurs fondamentales et en dépendent de la même manière ; elles ne se distinguent l'une de l'autre que par les valeurs numériques de ces dernières. — Ainsi tout cube est défini par une longueur, par exemple la longueur de son arête, et il se distingue de tout autre cube par la valeur numérique de cette longueur. — Toute vitesse exige, pour être définie, la considération d'une longueur et d'un temps. Ce qui établit une diversité entre les vitesses, ce sont les différentes valeurs que peuvent présenter cette longueur et ce temps.

Deux grandeurs d'espèces différentes |X|, |Y| dépendent, en général, de grandeurs fondamentales différentes, ou, si elles dépendent des mêmes grandeurs fondamentales, elles n'en dépendent pas de la même manière : l'un au moins des nombres λ, λ_0, τ, φ qui représentent les nombres de rapports fondamentaux intervenant dans les expressions des rapports $\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}$, $\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}$, est différent d'une de ces grandeurs à l'autre. — Ainsi une surface et un volume dépendent d'une seule et même grandeur fondamentale : une longueur; mais dans l'expression du rapport $\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}$ λ a la valeur 2, tandis que dans l'expression du rapport $\frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|}$ il a la valeur 3; en d'autres termes, dans l'expression du premier rapport on voit figurer deux rapports de longueurs, tandis que l'expression du second en renferme trois. — On exprime ce fait en disant qu'une surface est une grandeur du degré 2 par rapport à la longueur, tandis qu'un volume est du degré 3; ou bien encore en disant que les *dimensions* d'une surface et d'un volume relativement à la grandeur fondamentale |L| sont respectivement 2 et 3.

Autre exemple : une vitesse et une accélération dépendent l'une et l'autre des grandeurs fondamentales longueur et temps. Dans les expressions des rapports $\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}$, $\frac{|A|}{|\mathfrak{A}|}$, λ a la même valeur : 1; mais tandis que dans l'une $\tau = -1$, dans l'autre $\tau = -2$. On dira en conséquence que les *dimensions* de ces deux grandeurs sont les mêmes, et égales à 1 par rapport à la longueur, mais qu'elles sont différentes, et égales respectivement à -1 et -2 par rapport au temps.

Pour indiquer d'une manière abrégée les *dimensions* d'une grandeur, on est convenu d'écrire à la suite de l'initiale de cette grandeur le signe = suivi des initiales des grandeurs fondamentales dont elle dépend, affectées d'exposants marquant respectivement les nombres de rapports fondamentaux figurant dans l'expression du rapport de deux grandeurs de l'espèce en question.

Ainsi, le symbole

$$|G| = L^{\lambda-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi}$$

signifiera que la grandeur G est du degré $\lambda - \lambda_0$ par rapport à $|L|$, du degré τ par rapport à $|T|$, du degré φ par rapport à $|F|$, ce qui ne voudra pas dire autre chose sinon que l'expression du rapport

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|}$$

est formée en multipliant λ rapports de longueurs tels que $\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}$ par τ rapports de temps tels que $\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}$, par φ rapports de forces tels que $\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}$, et divisant le produit par λ_0 rapports de longueurs tels que $\frac{|L_0|}{|\mathcal{L}_0|}$.

Le symbole des dimensions d'une grandeur n'est qu'une indication abrégée de l'expression du rapport de deux grandeurs de l'espèce en question.

En se reportant au tableau qui termine le chapitre VI, on formera pour les diverses grandeurs qui y ont été considérées le tableau suivant des symboles de dimensions :

NOMS DES GRANDEURS		SYMBOLES DE DIMENSIONS
I. Longueur.	$\vert L\vert$	L
Surface.	$\vert S\vert$	L^2
Volume.	$\vert V_o\vert$	L^3
Angle plan.	$\vert O\vert$	L^{1-1}
Angle solide.	$\vert \Omega\vert$	L^{2-2}
Courbure.	$\vert C_o\vert$	L^{-1}
II. Temps.	$\vert T\vert$	T
Vitesse linéaire.	$\vert V\vert$	LT^{-1}
Vitesse angulaire.	$\vert V_a\vert$	$L^{1-1}T^{-1}$
Accélération.	$\vert A\vert$	LT^{-2}

III.	Force.	$\vert F \vert$	F
	Moment.	$\vert M_o \vert$	FL
	Travail.	$\vert W \vert$	FL
	Puissance mécanique.	$\vert P_m \vert$	FLT^{-1}
	Pression.	$\vert P \vert$	FL^{-2}
	Poids spécifique.	$\vert P_s \vert$	FL^{-3}
	Masse.	$\vert M \vert$	$FL^{-1}T^2$
	Densité.	$\vert D \vert$	$FL^{-4}T^2$
	Moment d'inertie.	$\vert K \vert$	FLT^2
	Quantités de mouvement.	$\vert Q \vert$	FT
	Force vive.	$\vert W \vert$	FL

CHAPITRE VIII

Choix systématique des unités. — Unités normales : mesures absolues.

Art. 1.

Définir une unité pour la mesure des grandeurs d'une certaine espèce $|G|$, c'est, parmi toutes les grandeurs de cette espèce, en assigner une $|\mathfrak{G}|$ à laquelle il sera convenu qu'on rapportera toutes les autres.

Or, la désignation précise, le signalement en quelque sorte de la grandeur $|\mathfrak{G}|$ sur laquelle on veut porter ce choix, se fait en indiquant les valeurs des grandeurs fondamentales dont elle dépend. — Ainsi nous aurons défini une unité pour les grandeurs $|G|$ en disant : on rapportera les grandeurs de cette espèce à la grandeur de même espèce $|\mathfrak{G}|$ pour laquelle les grandeurs fondamentales ont les valeurs particulières $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_o$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire valent respectivement $\mathfrak{L}$ fois, $\mathfrak{L}_o$ fois, $\mathfrak{T}$ fois,

$\mathfrak{F}$ fois la longueur, le temps, la force choisis au préalable arbitrairement pour unités de longueur, de temps et de force.

Soient L, L_0, T, F, relativement aux mêmes unités fondamentales, les valeurs numériques des grandeurs fondamentales dont dépend une grandeur $|G|$ de l'espèce considérée, on aura

$$\frac{|G|}{|\mathfrak{G}|} = h\left(\frac{L}{\mathfrak{L}}\right)^{\lambda}\left(\frac{L_0}{\mathfrak{L}_0}\right)^{-\lambda_0}\left(\frac{T}{\mathfrak{T}}\right)^{\tau}\left(\frac{F}{\mathfrak{F}}\right)^{\varphi}$$
$$= h\frac{L^{\lambda}L_0^{-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi}}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}},$$

d'où

$$|G| = h\frac{L^{\lambda}L_0^{-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi}}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}\cdot|\mathfrak{G}|.$$

Le nombre

$$h\frac{L^{\lambda}L_0^{-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi}}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}$$

ou

$$\frac{h}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}\cdot L^{\lambda}L_0^{-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi}$$

est la valeur numérique de la grandeur $|G|$.

Pour obtenir la valeur numérique d'une grandeur $|G|$ *il faut donc sur les nombres* L, L_0, T, F *fournis par la mesure des grandeurs fondamentales dont elle dépend effectuer les opérations indiquées par le symbole*

$$L^{\lambda}L_0^{-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi},$$

c'est-à-dire par le symbole même des dimensions de cette grandeur, et multiplier le résultat par le facteur

$$\frac{h}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}$$

calculé une fois pour toutes après le choix fait de l'unité.

Ainsi pour une première grandeur $|G_1|$, on aura

$$g_1 = \frac{h}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}\cdot L_1^{\lambda}L_{01}^{-\lambda_0}T_1^{\tau}F_1^{\varphi};$$

pour une seconde,

$$g_2 = \frac{h}{\mathcal{L}^{\lambda}\mathcal{L}_0^{-\lambda_0}\mathcal{T}^{\tau}\mathcal{F}^{\varphi}} \cdot L_2^{\lambda} L_{02}^{-\lambda_0} T_2^{\tau} F_2^{\varphi},$$

et ainsi de suite.

Le facteur

$$\frac{h}{\mathcal{L}\ \mathcal{L}_0^{-\lambda_0}\mathcal{T}^{\tau}\mathcal{F}^{\varphi}}$$

dépend par son numérateur h de la nature des grandeurs $|G|$ et par son dénominateur $\mathcal{L}^{\lambda}\mathcal{L}_0^{-\lambda_0}\mathcal{T}^{\tau}\mathcal{F}^{\varphi}$ du *signalement* de celle de ces grandeurs qui a été choisie pour unité.

EXEMPLES.

I

Dans l'ancien système de mesures françaises, l'unité de superficie pour l'évaluation des terrains était la surface d'un carré de 22 pieds de côté qu'on appelait *perche des eaux et forêts*.

Soit à évaluer en perches une surface donnée.

La formule générale exprimant la valeur numérique du rapport de deux surfaces est

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = h\,\frac{L'L''}{\mathcal{L}'\mathcal{L}''}.$$

Dans l'exemple proposé, on a $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'' = 22$; donc

$$\frac{h}{\mathcal{L}'\mathcal{L}'} = \frac{h}{(22)^2} = \frac{h}{484}.$$

Si la surface à évaluer est celle d'un carré de côté $|L|$, on cherchera la valeur numérique de $|L|$ en pieds, soit L, et l'on aura pour la valeur numérique s de la surface de ce carré

$$s = \frac{1}{484}\cdot L^2,$$

(h ayant dans ce cas la valeur 1). — Ainsi, la surface d'un carré ayant une toise (6 pieds) de côté vaudra

$$\frac{1}{484}\cdot 36.$$

Si la surface à évaluer est celle d'un cercle de rayon |L|, on évaluera |L| en pieds, et l'on aura pour valeur numérique de la surface du cercle

$$s = \frac{\pi}{484} L^2$$

(h ayant dans ce cas la valeur π).

II

Soit à évaluer un angle.

On fera usage pour cela de la formule

$$0 = \frac{|0|}{|\mathcal{O}|} = \frac{\frac{\mathbf{a}}{L}}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle choisi comme unité d'angle est l'*angle droit*, cette convention se traduit dans la formule générale en posant

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ circonf.}}{\frac{1}{2}\text{ diam.}} = \frac{\pi}{2},$$

et la valeur numérique d'un angle interceptant un arc $\mathbf{a}$ dans un cercle de rayon L ayant son centre au sommet est donnée par la formule

$$0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle pris pour unité d'angle est l'angle appelé *degré*, ou la 90e partie d'un angle droit, on doit faire

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{90} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180},$$

et l'on a par suite

$$0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle unité était le *grade* ou la 100e partie d'un angle droit, on aurait

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{200},$$

et par suite

$$0 = \frac{200}{\pi} \cdot \frac{a}{L} \cdot$$

III

Soit à évaluer le travail d'une force.

Cette évaluation exige des mesures de longueurs et de forces. Convenons d'évaluer les longueurs en mètres et les forces en kilogrammes, et adoptons pour unité de travail le travail d'une force de 75 kilogrammes dont le point d'application est déplacé dans la direction de la force d'une longueur égale à un mètre, travail que nous désignerons sous le nom de *cheval-vapeur*.

La formule générale exprimant la valeur numérique d'un rapport de travaux est

$$w = \frac{FL}{\mathfrak{F}.\mathfrak{L}} = \frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}} \cdot FL.$$

Le choix que nous avons fait de l'unité de travail se traduit dans cette formule par les valeurs

$$\mathfrak{F} = 75, \qquad \mathfrak{L} = 1,$$

et par suite

$$\mathfrak{F}\mathfrak{L} = 75.$$

Le travail d'une force de F kilogrammes pour un déplacement de son point d'application égal à L mètres sera alors exprimé par le nombre

$$w = \frac{1}{75} \cdot FL.$$

Si l'on prenait pour unité de travail le travail correspondant à une calorie, lequel est égal au travail d'une force de 424,2 kilogrammes déplaçant son point d'application de 1 mètre, on devrait donner à $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$ la valeur 424,2, et l'on aurait pour l'expression de la valeur numérique d'un travail quelconque

$$w = \frac{1}{424{,}2} \cdot FL.$$

—

ART. 2.

Parmi toutes les grandeurs d'une espèce donnée |G|, il en est une qui, choisie pour unité, apporterait dans les expressions des valeurs numériques des autres une simplification très grande; c'est celle pour laquelle le nombre

$$\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}$$

serait égal à 1, et qui peut être définie par les valeurs

$$\mathfrak{L}=1, \quad \mathfrak{L}_0=1, \quad \mathfrak{T}=1, \quad \mathfrak{F}=1.$$

Dans ce cas particulier les valeurs numériques des diverses grandeurs $|G_1|$, $|G_2|$... de l'espèce considérée seraient

$$g_1 = h.L_1^{\lambda}L_{01}^{-\lambda_0}T_1^{\tau}F_1^{\varphi},$$
$$g_2 = h.L_2^{\lambda}L_{02}^{-\lambda_0}T_2^{\tau}F_2^{\varphi},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Avec cette unité particulière, il suffirait, on le voit, pour calculer la valeur numérique d'une grandeur, à l'aide des valeurs numériques L, L_0, T, F des grandeurs fondamentales dont elle dépend, d'effectuer les opérations marquées par le symbole des dimensions et de multiplier le produit par h. — On serait dispensé du soin de chercher et de retenir la valeur du facteur: $\frac{1}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}$ puisque alors ce facteur aurait la valeur 1.

Appliquons cette remarque aux exemples de tout à l'heure.

I

Si, au lieu de la perche, nous prenons pour unité de superficie la surface d'un carré d'un pied de côté, la valeur numérique de la surface d'un carré de L pieds de côté sera donnée par l'expression très simple

$$s = L^2;$$

celle de la surface d'un cercle de L pieds de rayon, par

$$s = \pi.L^2, \quad \text{etc.}$$

II

Si, au lieu de l'angle droit, du degré ou du grade, nous prenons pour unité d'angle l'angle pour lequel $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}$ est égal à 1, c'est-à-dire l'angle qui intercepte un arc égal au rayon dans un cercle ayant son centre au sommet, la valeur numérique d'un angle interceptant un arc $\mathbf{a}$ dans un cercle de rayon L ayant son centre au sommet sera donnée par l'expression

$$o = \frac{\mathbf{a}}{\mathrm{L}}.$$

Dans ce cas, l'angle unité est désigné sous le nom de *radian*.

C'est de cette unité qu'il est toujours fait usage dans les formules d'analyse.

III

Si, au lieu des unités de travail précédemment définies, nous choisissons comme unité de travail le travail d'une force d'un kilogramme dont le point d'application se déplace d'une longueur égale à 1 mètre, travail désigné sous le nom de *kilogrammètre*, le travail d'une force de F kilogrammes dont le point d'application se déplace de L mètres aura pour valeur numérique simplement :

$$w = \mathrm{FL}.$$

ART. 3.

Parmi toutes les grandeurs d'une espèce donnée, nous nommerons grandeur *normale* celle pour laquelle $\mathfrak{L} = 1$, $\mathfrak{L}_0 = 1$, $\mathfrak{T} = 1$, $\mathfrak{F} = 1$.

Si elle est prise pour terme de comparaison des grandeurs de son espèce, elle sera appelée *unité normale* des grandeurs de cette espèce.

Substituer à diverses conventions arbitraires dans le choix des unités une règle uniforme consistant à prendre pour chaque espèce de grandeur ce que nous venons d'appeler l'unité normale, c'est substituer, ainsi que nous venons de le voir, à des formules plus ou moins compliquées les formules

les plus simples possible; c'est mettre de l'ordre, de la méthode, de la clarté à la place de la confusion, de l'incohérence et de l'obscurité; c'est constituer ce qu'on appelle un *système coordonné* d'unités dérivées.

Dans un pareil système tous les choix d'unités se font suivant la même règle, qui consiste à prendre pour unité des grandeurs de chaque espèce l'*unité normale*.

Trois choix seulement restent arbitraires : les choix des unités des grandeurs fondamentales, c'est-à-dire le choix de l'unité de longueur, celui de l'unité de temps et celui de l'unité de force.

Un pareil système d'unités étant exempt de tout l'arbitraire qui ne tient pas à la nature même des choses, est qualifié de *système absolu*.

Les unités de ce système sont appelées *unités absolues*, et les mesures faites à l'aide de ces unités sont dites *mesures absolues*.

Ce caractère appartient aux mesures exprimées dans les formules classiques de la géométrie et de la mécanique, car les unités choisies par les géomètres pour les grandeurs géométriques et mécaniques sont précisément des unités normales.

CHAPITRE IX

De l'homogénéité et de la similitude en géométrie et en mécanique.

Art. 1. — *De l'homogénéité et de la similitude en géométrie.*

Soit, d'une part, $|\mathfrak{M}|$ un groupe d'objets géométriques comprenant des longueurs $|L|$..., des surfaces $|S|$..., des volumes $|V_o|$..., des angles $|O|$..., etc. Soit, d'autre part, un

second groupe : $|\mathfrak{N}|$, comprenant des éléments $|\mathfrak{L}|\ldots$, $|\mathfrak{S}|\ldots$, $|\mathfrak{V}_0|\ldots$, $|\mathfrak{O}|\ldots$, respectivement de même nature que les précédents et leur servant de termes de comparaison. — L'établissement de relations entre les rapports résultant de ces comparaisons est un des principaux objets de la géométrie.

Nous avons vu (chap. III) que, sous forme explicite, les rapports

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\ldots,\ \frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}\ldots,\ \frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|}\ldots,\ \frac{|O|}{|\mathfrak{O}|}\ldots$$

étaient nécessairement des produits de rapports de lignes; ils ne peuvent donc être comparés entre eux que sous les formes suivantes :

$$h_1\frac{|L_1|}{|\mathfrak{L}_1|},\qquad h_2\frac{|L'_2|}{|\mathfrak{L}'_2|}\cdot\frac{|L''_2|}{|\mathfrak{L}''_2|},\qquad h_3\frac{|L'_3|}{|\mathfrak{L}'_3|}\cdot\frac{|L''_3|}{|\mathfrak{L}''_3|}\cdot\frac{|L'''_3|}{|\mathfrak{L}'''_3|}\ldots,$$

et toute relation entre ces rapports sera en définitive représentée par une équation telle que

$$F\left(h_1\frac{|L_1|}{|\mathfrak{L}_1|},\quad h_2\frac{|L'_2|}{|\mathfrak{L}'_2|}\frac{|L''_2|}{|\mathfrak{L}''_2|},\ldots\right)=0,$$

que nous désignerons d'une manière abrégée par

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right)=0.$$

THÉORÈME. — *Si la fonction* F *est algébrique et homogène par rapport aux quotients* $\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}$, *elle convient à tous les systèmes* $|N_K|$ $|\mathfrak{N}|_\mathfrak{K}$ *formés de groupes de figures respectivement semblables à celles qui composent* $|N|$ *et* $|\mathfrak{N}|$, K *et* $\mathfrak{K}$ *étant les rapports de similitude.*

En effet, si, dans la relation précédente, on multiplie chaque rapport de lignes par $\frac{K}{\mathfrak{K}}$, on a, en vertu de l'homogénéité,

$$F\left(\frac{K}{\mathfrak{K}}\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right)=\left(\frac{K}{\mathfrak{K}}\right)^n F\left(\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right)=0.$$

Or, la relation

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)=0$$

est formée avec les quantités relatives à $|N|_K$ et $|\mathfrak{N}|_k$ comme la première l'était avec les quantités relatives aux systèmes $|N|$, $|\mathfrak{N}|$.

Réciproquement, pour que la relation exprimée par l'équation

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)=0$$

convienne à tous les systèmes semblables au premier, il faut que la fonction F *soit homogène par rapport aux quotients* $\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}$.

En effet, l'application à un système semblable au premier des opérations représentées par $F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)$ change cette expression en

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)$$

et pour que sa valeur reste égale à zéro quels que soient K et $\mathcal{K}$, il faut qu'elle soit homogène par rapport aux quotients $\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}$.

Il y a ainsi la plus étroite corrélation entre la similitude des systèmes géométriques et la qualité d'homogénéité des relations qui leur sont communes, de telle sorte que la généralité d'une relation entraîne son homogénéité et réciproquement.

Soient, par exemple, une sphère de rayon L et un cube d'arête $|\mathcal{L}|$. En comparant la surface $|S|$ et le volume $|V_o|$ de la sphère à la surface $|\mathcal{S}|$ et au volume $|\mathcal{V}_o|$ du cube, on peut écrire la relation

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}=\varepsilon\frac{|V_o|}{|\mathcal{V}_o|}\frac{|\mathcal{L}|}{|L|}$$

ou

$$h_2\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2=\varepsilon\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^3\frac{|\mathcal{L}|}{|L|}.$$

Cette relation est homogène; elle convient à tous les systèmes semblables à celui que nous venons de considérer.

Par contre, si pour le système considéré on écrit la relation

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = \eta \frac{|V_0|}{|\mathcal{V}_0|},$$

qui revient à

$$h_2 \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2 = \eta \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^3,$$

et par conséquent n'est pas homogène, on ne pourra pas, en y regardant η comme une constante, l'appliquer à une autre sphère et à un autre cube.

Lorsqu'une relation n'est pas homogène, elle ne convient qu'à un seul système $|N|$, $|\mathcal{N}|$; elle est contingente.

Il est rare qu'on ait à prendre en considération de telles relations.

2. *Les propositions de la géométrie ordinaire conduisent à des relations homogènes et permettent de trouver toutes celles qui sont possibles.*

Soit $|\Lambda|$ une ligne quelconque. La relation

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right) = 0$$

peut s'écrire

$$F\left(\frac{|\Lambda|}{|\mathcal{L}_i|} \cdot \frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) = 0$$

ou

$$\Phi\left(\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) = 0.$$

Les relations

$$\Phi\left(\frac{K}{\mathcal{K}} \cdot \frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n \Phi\left(\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right)$$

sont respectivement équivalentes à

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}} \; \frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right),$$

et si l'on a

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\,\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right) = \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right),$$

on a par suite

$$\Phi\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\,\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) = \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n \Phi\left(\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right);$$

c'est-à-dire que l'existence d'une relation homogène telle que F( ) entraîne celle d'une relation homogène telle que Φ( ), et réciproquement.

Il n'y a donc pas plus de généralité à concevoir les relations géométriques sous la forme F( ) que sous la forme Φ( ). Recherchons donc la condition d'existence de relations homogènes du type Φ( ).

Et d'abord, observons que l'établissement d'une relation telle que Φ( ) revient à comparer le groupe |N| à un groupe $|\mathcal{N}|$ dont les éléments sont définis et complètement déterminés par la donnée d'une seule longueur |Λ|.

Or, tel est le cas des relations établies en géométrie lorsqu'on convient de comparer les lignes à une certaine ligne droite |Λ|, les surfaces à la surface d'un carré de côté |Λ|, les volumes au volume d'un cube d'arête |Λ|; en un mot, lorsqu'on convient d'évaluer les diverses grandeurs à l'aide d'un système d'*unités normales*.

Les relations exprimées, en suivant cette méthode, par les formules classiques de la géométrie, ont été établies sans rien supposer sur la grandeur particulière de la ligne |Λ|. Elles sont valables pour toutes les valeurs de |Λ|. Elles ne doivent pas être altérées si l'on substitue $k|\Lambda|$ à |Λ|, quel que soit k. Elles sont donc homogènes par rapport aux quotients $\frac{|L_i|}{|\Lambda|}$.

En résumé, les relations de la géométrie classique appartiennent à un type spécial et sont homogènes. Elles doivent leur constitution particulière (type Φ( )) à l'emploi dans les mesures d'un système d'unités normales, et leur homogénéité à l'indétermination de la base de ce système.

Si une relation géométrique se présente sous forme d'une égalité entre deux expressions, l'homogénéité de la relation exige que ces deux expressions soient homogènes et du même degré par rapport à $\frac{|L_i|}{|A|}$, ou, en d'autres termes, aient le même symbole de dimensions : L^n. Il est bon de toujours faire cette vérification dans le cours ou à la fin d'une série de calculs, car l'absence d'homogénéité dans un résultat serait l'indice d'une erreur commise soit dans l'écriture des formules prises comme point de départ, soit dans l'exécution des opérations subséquentes (1).

Art. 2. — *De l'homogénéité en mécanique.*

Les équations de la mécanique expriment des relations entre des rapports de diverses grandeurs géométriques, cinématiques et dynamiques.

Elles sont établies à l'aide de principes et de raisonnements qui permettent de laisser complètement arbitraires trois des grandeurs qui servent de termes de comparaison, par exemple les trois grandeurs fondamentales : longueur, temps, force. Mais il est convenu que les autres grandeurs choisies pour unités sont les unités normales du système absolu ayant pour bases les premières.

Il suit de là que toute équation de mécanique jouit, par rapport à chacune des trois grandeurs dont les unités sont laissées arbitraires, de la propriété d'homogénéité que présentent les équations de la géométrie relativement à la seule longueur. — Les différents termes d'une telle équation devront donc avoir les mêmes dimensions par rapport à |L|, les mêmes dimensions par rapport à |T|, les mêmes dimensions par rapport à |F|, à condition, bien entendu, d'avoir égard à la dépendance convenue entre les grandeurs dérivées et les grandeurs fondamentales.

---

(1) Voir la note I.

Ainsi, dans la formule

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

donnée par Newton pour représenter la vitesse de propagation du son dans l'air, e désignant une pression (dimens. FL^{-2}), et d une densité (dimens. $FL^{-4}T^2$), les symboles de dimensions des deux membres sont respectivement

$$LT^{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{FL^{-2}}{FL^{-4}T^2}} = LT^{-1},$$

c'est-à-dire que les deux membres sont de degré 1 en L, de degré — 1 en T et de degré 0 en F.

Ainsi encore dans la formule

$$t = \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\mathcal{M}_0}},$$

qui exprime la durée de l'oscillation d'un corps suspendu à un fil élastique, autour de l'axe de ce fil, sous l'influence d'une torsion, $\Sigma m r^2$ désignant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe du fil et $\mathcal{M}_0$ le moment du couple de torsion par unité d'angle, les symboles de dimensions des deux membres sont respectivement

$$T \text{ et } \sqrt{\frac{ML^2}{FL}} = \sqrt{\frac{M}{F}L} = \sqrt{\frac{T^2}{L}L} = T.$$

Ce caractère d'homogénéité permet de prévoir la forme que doit présenter une équation de mécanique entre des grandeurs données.

Cette remarque paraît avoir été nettement formulée et appliquée par le chevalier Daviet de Foncenex, qui s'en est servi pour donner une solution du problème de la composition des forces [1]. M. Bertrand l'a remise en lumière de nos jours et en a montré, par de nombreux exemples, toute la fécondité [2].

---

(1) *Sur les principes fondamentaux de la mécanique.* — *Mélanges de la Soc. de Turin*, t. II, p. 299; 1760-61.

(2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 1878, et *Théorie mathém. de l'électricité*, chap. XIII, p. 272.

Supposons que la solution d'un problème doive donner une relation

$$L = \varphi(T, F, M)$$

entre les valeurs numériques d'une longueur, d'un temps, d'une force et d'une masse.

Le second membre de cette relation doit être, comme le premier, de degré 1 en L, de degré 0 en T et de degré 0 en F. Or, il ne dépend de L que par M. Pour être de degré 1 en L, il faut qu'il soit de degré — 1 en M. On doit donc avoir

$$L = \frac{\psi(T.F)}{M}.$$

Pour que le second membre soit de degré 0 en T, il faut que son numérateur soit, comme son dénominateur, de degré 2 en T. Donc

$$L = \frac{T^2 . \chi(F)}{M}.$$

Enfin, pour que cette expression soit de degré 0 en F, il faut que le numérateur soit, ainsi que M, de degré 1 en F. On a donc nécessairement

$$L = h\frac{FT^2}{M},$$

h étant un coefficient sans dimensions.

Telle doit être par exemple la relation existant entre la durée T d'oscillation d'un pendule, la longueur L du fil, la masse M qui oscille et le poids F de cette masse. On a donc pour représenter cette durée d'oscillation la formule

$$T = \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{L\frac{M}{F}} = \theta\sqrt{\frac{L}{\frac{F}{M}}},$$

ou, en posant $\frac{F}{M} = g$,

$$T = \theta\sqrt{\frac{L}{g}},$$

θ étant une fonction de l'angle d'écart qui reste à déterminer.

Considérons encore, avec M. Bertrand, la durée de l'oscillation

d'une corde vibrante. Elle dépend de la longueur de la corde, de sa masse M et du poids tenseur F. Elle est donc liée à ces quantités par la formule précédente

$$T = \Xi \sqrt{\frac{LM}{F}},$$

Ξ désignant un facteur numérique qui ne sera évidemment pas le même que dans le problème précédent.

Soient, suivant les notations habituelles, ρ la masse spécifique de la corde et r le rayon de sa section; on a

$$M = \pi r^2 L \rho.$$

Donc

$$T = \Xi r L \sqrt{\frac{\pi\rho}{F}},$$

et si N désigne le nombre de vibrations de la corde dans l'unité de temps, on déduit de là

$$N = \frac{1}{\Xi r L} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}},$$

ou, en exprimant ρ au moyen du poids spécifique d,

$$N = \frac{1}{\Xi r L} \sqrt{\frac{gF}{\pi d}}.$$

Comme en géométrie, on fait d'ailleurs en mécanique constamment usage de ces considérations d'homogénéité pour vérifier l'exactitude des calculs effectués sur les formules.

Art. 3. — *De la similitude en mécanique.*

Soit

$$F\left[\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}, \frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}, \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}, \frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}, \frac{|A|}{|\mathfrak{A}|}, \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} \cdots\right] = 0$$

une équation fournie par un problème de mécanique, les grandeurs

$$|L| \quad |T| \quad |F| \quad |V_i| \quad |A| \quad |M|$$

se rapportant au système étudié, et

$$|\mathfrak{L}| \quad |\mathfrak{T}| \quad |\mathfrak{F}| \quad |\mathfrak{V}_i| \quad |\mathfrak{A}| \quad |\mathfrak{M}|$$

représentant les grandeurs prises respectivement pour unités.

On peut, comme nous l'avons remarqué plus haut, sans troubler l'équation, changer

$$|\mathfrak{L}| \text{ en } \frac{|\mathfrak{L}|}{l},$$

$$|\mathfrak{T}| \text{ en } \frac{|\mathfrak{T}|}{t},$$

$$|\mathfrak{F}| \text{ en } \frac{|\mathfrak{F}|}{f},$$

à condition de changer en même temps (puisque toutes les unités sont des unités normales)

$$|\mathfrak{V}_i| \text{ en } \frac{|\mathfrak{V}_i|}{lt^{-1}} = \frac{|\mathfrak{V}_i|}{v},$$

$$|\mathfrak{A}| \text{ en } \frac{|\mathfrak{A}|}{lt^{-2}} = \frac{|\mathfrak{A}|}{a},$$

$$|\mathfrak{M}| \text{ en } \frac{|\mathfrak{M}|}{fl^{-1}t^{2}} = \frac{|\mathfrak{M}|}{m},$$

Etc.

La nouvelle équation

$$F\left[\frac{l|L|}{|\mathfrak{L}|}, \frac{t|T|}{|\mathfrak{T}|}, \frac{f|F|}{|\mathfrak{F}|}, \frac{v|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}, \frac{a|A|}{|\mathfrak{A}|}, \frac{m|M|}{|\mathfrak{M}|}, \dots\right] = 0$$

peut être aussi considérée comme correspondant au maintien des unités

$$|\mathfrak{L}| \quad |\mathfrak{T}| \quad |\mathfrak{F}| \quad |\mathfrak{V}_i| \quad |\mathfrak{A}| \quad |\mathfrak{M}|$$

et au changement de

$|L|$ en $l|L|$,
$|T|$ en $t|T|$,
$|F|$ en $f|F|$,
$|V_i|$ en $v|V_i|$,
$|A|$ en $a|A|$,
$|M|$ en $m|M|$,
Etc.

Cette simple remarque est toute la théorie de ce qu'on peut appeler la similitude en mécanique.

Une relation de mécanique ne change pas si l'on change toutes les longueurs du système auquel elle s'applique dans le rapport l, tous les temps dans le rapport t, toutes les forces dans le rapport f, les angles étant conservés, pourvu qu'en même temps on change toutes les vitesses dans le rapport $v = lt^{-1}$, toutes les accélérations dans le rapport $a = lt^{-2}$, toutes les masses dans le rapport $m = fl^{-1}t^2$, etc.

Et réciproquement, *si deux systèmes offrent une telle corrélation que les mêmes formules leur conviennent, l, t, f étant les rapports des longueurs, des temps et des forces, on a nécessairement pour les rapports des vitesses, des accélérations, des masses, etc., les valeurs*

$$v = lt^{-1},$$
$$a = lt^{-2},$$
$$m = fl^{-1}t^2,$$
Etc.

Supposons qu'on puisse à chaque point d'un premier système faire correspondre un point homologue dans un second système et que le rapport des dimensions homologues soit le même, l; les deux systèmes seront *géométriquement semblables.*

Supposons que les vitesses de deux points homologues quelconques, après des temps respectifs $|T|$ et $t|T|$, soient dirigées semblablement dans les deux systèmes et soient dans un rapport constant v; les deux systèmes pourront être dits *cinématiquement semblables.*

Supposons que les forces agissant, aux temps indiqués plus haut, sur deux points homologues quelconques, soient semblablement placées et dans le rapport constant f; les deux systèmes pourront être dits *dynamiquement semblables.*

Supposons enfin que la masse d'un point matériel quelconque du second système soit dans un rapport constant avec la masse du point homologue du premier; les deux systèmes pourront être dits *matériellement semblables.*

La loi de similitude en mécanique signifie que pour que toutes ces conditions soient réalisées à la fois, il faut et il suffit que l'on ait

$$v = lt^{-1},$$
$$m = fl^{-1}t^{2}.$$

Ces considérations importantes n'avaient pas échappé à Newton, ainsi qu'on peut le voir dans l'énoncé de la proposition suivante du livre III des *Principes* (1) :

« Si corporum systemata duo similia ex aequali particularum numero constent, et particulae correspondentes similes sint et proportionales, singulae in uno systemate singulis in altero, et similiter sitae inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eae inter se quae in uno sunt systemate et eae inter se quae sunt in altero) et si non tangant se mutuo quae in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fungent se mutuò nisi viribus acceleraticcibus quae sint est particularum correspondentium diametri inversi et quadrata velocitatum directi : dico quod systematum particulae illae pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. »

Cet énoncé revient, avec nos notations, à présenter la condition

$$m = fl^{-1}t^{2},$$

sous la forme équivalente

$$\frac{f}{m} = lt^{-2}$$

ou

$$\frac{f}{m} = \frac{v^{2}}{l}.$$

M. Bertrand, en rappelant l'attention sur ce théorème de Newton (2), en a indiqué une démonstration fondée sur la considération de l'équation générale, d'où l'on peut déduire la solution de tous les problèmes de mécanique, savoir :

$$\Sigma\left[\left(X-\mu\frac{d^{2}x}{dt^{2}}\right)\delta x+\left(Y-\mu\frac{d^{2}y}{dt^{2}}\right)\delta y+\left(Z-\mu\frac{d^{2}z}{dt^{2}}\right)\delta z\right]=0.$$

(1) *Principia*, lib. III, prop. XXXII, theor. XXVI.
(2) *Journal de l'École polytechnique*, t. XIX, 32e cahier, p. 189; 1848.

Si, dans un système mécanique auquel on a fait l'application de cette équation, toutes les longueurs sont altérées dans un rapport l, toutes les forces dans un rapport f, toutes les masses dans un rapport m et tous les temps dans un rapport t, l'expression Σ se change en la suivante :

$$\Sigma\left[\left(fX-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2x}{dt^2}\right)l\delta x+\left(fY-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2y}{dt^2}\right)l\delta y+\left(fZ-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2z}{dt^2}\right)l\delta z\right]$$

qui sera égale à zéro à condition que l'on ait

$$f=\frac{ml}{t^2}.$$

La démonstration de Newton, ainsi que le fait remarquer M. Bertrand, « permet de mieux comprendre la véritable raison du théorème et semble en même temps plus propre à guider dans les nombreuses applications dont il est susceptible ». Mais cette démonstration est un peu longue et éparse en plusieurs endroits du livre des *Principes*. La démonstration fondée sur l'examen des conditions d'homogénéité des équations de la mécanique et la considération des dimensions des grandeurs qui y figurent, semble avoir l'avantage d'unir la brièveté à toute la clarté désirable.

On pourra juger de la variété et de l'intérêt des applications dont est susceptible le théorème en question par les exemples suivants, empruntés à M. Bertrand [1] :

I. Soit un point matériel de masse μ sollicité vers un centre O par une force proportionnelle à la distance. Considérons les systèmes obtenus en plaçant le point μ sans vitesse initiale à deux distances différentes du centre; ce sont deux systèmes mécaniquement semblables. Le rapport des masses est égal à l'unité. Si l est le rapport des distances, celui des forces, par suite de la loi supposée de l'attraction, sera aussi l. On a donc dans ce cas particulier

$$m=1,$$
$$f=l.$$

---

[1] *Loc. cit.*

Si l'on introduit ces valeurs dans la relation générale

$$f = mlt^{-2},$$

on en tire

$$t = 1,$$

ce qui signifie qu'au bout de temps égaux les deux mobiles sont en des points homologues. En particulier, les deux mobiles arriveront en même temps au point O, ou, en d'autres termes, le temps employé par un mobile attiré par un point O, suivant la loi supposée plus haut pour parvenir à ce point, est indépendant de la distance initiale.

La formule $v = lt^{-1}$ donne dans ce cas $v = l$, d'où il suit que le rapport des vitesses est égal au rapport des distances, ou que la vitesse du mobile est proportionnelle à sa distance au centre et par suite à la force. Si donc, en outre de l'attraction supposée, s'exerçait sur le mobile une résistance proportionnelle à la vitesse, le problème ne serait pas changé; on aurait toujours

$$m = 1,$$
$$f = l,$$

et par suite $t = 1$, c'est-à-dire que le temps employé par le mobile pour atteindre le centre O serait encore indépendant de la distance initiale.

Comme c'est à la considération d'un mouvement tel que celui que nous venons d'examiner que se ramène l'étude du mouvement d'un point pesant sur une cycloïde, on démontre immédiatement par les considérations qui précèdent le tautochronisme de cette courbe, soit dans le cas du vide, soit dans le cas d'un milieu résistant proportionnellement à la vitesse.

II. Considérons deux pendules simples, de même masse, de longueurs inégales et écartés du même angle. Ils forment deux systèmes mécaniquement semblables, pour lesquels $m = 1$. La formule

$$f = mlt^{-2}$$

devient ici

$$f = lt^{-2}$$

et donne

$$t = \sqrt{\frac{l}{f}}$$

ou

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\frac{L_1}{L_2}}{\frac{F_1}{F_2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{L_1}{L_2}}{\frac{g_1}{g_2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{L_1}{g_1}}}{\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}}.$$

On voit par là que T est proportionnel à $\sqrt{\frac{L}{g}}$, le coefficient de proportionnalité dépendant de l'angle d'écart.

III. Soient deux cordes de longueurs inégales tendues par des poids égaux et munies de curseurs semblablement placés dont les masses sont entre elles dans le rapport même des distances, qui est le rapport l des longueurs.

Elles offrent un cas de similitude mécanique dans lequel

$$f=1$$
$$m=l.$$

La formule

$$f=mlt^{-2}$$

donne alors

$$t=l.$$

On en conclut que les durées d'oscillation des deux cordes sont entre elles dans le même rapport que leurs longueurs et aussi dans le même rapport que les masses des curseurs, résultat conforme à celui auquel est arrivé Duhamel dans l'étude analytique du problème.

IV. Considérons enfin la propagation d'un ébranlement dans deux colonnes élastiques de mêmes dimensions, mais de natures différentes, l'une d'élasticité e_1 et de densité d_1, l'autre d'élasticité e_2 et de

densité d_2. Les colonnes en question forment deux systèmes semblables pour lesquels on a

$$l = 1,$$
$$f = \frac{e_1}{e_2},$$
$$m = \frac{d_1}{d_2}.$$

La formule

$$f = mlt^{-2}$$

conduit à la relation

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{\frac{d_1}{d_2}}{\frac{e_1}{e_2}}}.$$

Mais ici

$$v = \frac{1}{t};$$

donc

$$v = \sqrt{\frac{\frac{e_1}{e_2}}{\frac{d_1}{d_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{e_1}{d_1}}{\frac{e_2}{d_2}}}.$$

La vitesse de propagation d'un ébranlement dans une colonne élastique est proportionnelle à $\sqrt{\frac{e}{d}}$, résultat conforme à la formule de Newton.

Les considérations qui font l'objet de ce chapitre ont un intérêt pratique très considérable; elles expliquent pourquoi des systèmes mécaniques qui réussissent en petit, souvent, à

la grande surprise des inventeurs, ne réussissent pas en grand. Voici un exemple très simple, emprunté à Galilée, qui fera clairement saisir cette importante remarque :

Soit une poutre homogène, de section uniforme S, encastrée normalement dans un mur vertical et faisant saillie en dehors sur une longueur 2L. Considérons la section de la poutre située au ras du mur. On peut assimiler la résistance qui la maintient en place à une force normale qui sera représentée par $\varphi.S$, si φ désigne sa valeur par unité de surface, valeur qui dépend de la nature de la substance constituant la poutre. Si H désigne le bras de levier de cette force par rapport au point d'appui inférieur de la section, son moment par rapport à ce point sera

$$\varphi SH.$$

La section est sollicitée à tourner autour de ce point par l'action de la pesanteur sur la partie saillante de la poutre. Soit P le poids de cette partie. Il est appliqué à une distance L du mur; son moment par rapport au point d'appui de la section est donc

$$PL.$$

La poutre résistera ou se rompra suivant que l'on aura

$$\varphi SH > PL$$

ou

$$\varphi SH < PL,$$

et l'état critique sera caractérisé par la relation

$$\varphi SH = PL.$$

En désignant par p le poids spécifique de la substance constituant la poutre, on a $P = S.2L.p$, et la relation précédente peut s'écrire

$$\varphi SH = S.2L.pL.$$

Supposons une première poutre dans l'état critique et considérons une deuxième poutre de même substance, semblable à la première et semblablement encastrée, le rapport de similitude ayant la valeur l. Pour cette seconde poutre, le moment de la résistance sera

$$\varphi.l^2S.lH$$

et le moment de la puissance

$$l^2S.2lL.p.lL,$$

φ et p conservant les mêmes valeurs, puisque la nature de la substance est la même. Or, ces deux moments ne sont plus égaux. On se serait donc trompé si l'on avait voulu conclure de la stabilité de la première poutre celle de la seconde.

Si, en changeant ainsi l'échelle d'un système mécanique, il peut arriver qu'on trouve un changement dans les lois qui le régissent, c'est que lorsqu'on passe du petit au grand on n'est souvent pas maître de faire varier toutes les quantités suivant les rapports exigés par les règles de la similitude mécanique exposées tout à l'heure.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on n'était pas maître de faire varier φ et p.

LIVRE II

Examen de divers systèmes pratiques d'unités absolues géométriques et mécaniques.

CHAPITRE I

Différents types possibles de systèmes coordonnés d'unités dérivées.

Considérons trois grandeurs $|X|$, $|Y|$, $|Z|$ telles que les égalités

$$\frac{|X|}{|\mathcal{X}|} = h' \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{\lambda'} \left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{\tau'} \left(\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\right)^{\varphi'},$$

$$\frac{|Y|}{|\mathcal{Y}|} = h'' \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{\lambda''} \left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{\tau''} \left(\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\right)^{\varphi''},$$

$$\frac{|Z|}{|\mathcal{Z}|} = h''' \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{\lambda'''} \left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{\tau'''} \left(\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\right)^{\varphi'''},$$

fournies par le tableau du chapitre VI (livre I), puissent être résolues par rapport à $\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}$, $\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}$, $\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}$.

A l'aide des expressions

$$\frac{|L|}{|\mathcal{L}|} = k' \left(\frac{|X|}{|\mathcal{X}|}\right)^{x'} \left(\frac{|Y|}{|\mathcal{Y}|}\right)^{y'} \left(\frac{|Z|}{|\mathcal{Z}|}\right)^{z'},$$

$$\frac{|T|}{|\mathcal{T}|} = k'' \left(\frac{|X|}{|\mathcal{X}|}\right)^{x''} \left(\frac{|Y|}{|\mathcal{Y}|}\right)^{y''} \left(\frac{|Z|}{|\mathcal{Z}|}\right)^{z''},$$

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|} = k''' \left(\frac{|X|}{|\mathcal{X}|}\right)^{x'''} \left(\frac{|Y|}{|\mathcal{Y}|}\right)^{y'''} \left(\frac{|Z|}{|\mathcal{Z}|}\right)^{z'''},$$

qui en seront déduites, on pourra exprimer tous les rapports

$$\frac{|G|}{|\mathfrak{G}|}$$

au moyen des rapports

$$\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}, \quad \frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}, \quad \frac{|Z|}{|\mathfrak{Z}|},$$

et l'on formera un tableau dans lequel ces derniers joueront un rôle analogue à celui que jouaient dans le tableau du chapitre VI (livre I) les rapports des trois grandeurs fondamentales

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}, \quad \frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}, \quad \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}.$$

On pourra ainsi, avec les grandeurs

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|,$$

faire ce que l'on avait fait avec les grandeurs

$$|L|, \quad |T|, \quad |F|,$$

c'est-à-dire définir un système coordonné d'unités dans lequel les unités des grandeurs

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|$$

serviront de bases, la définition des unités dérivées se déduisant du symbole des dimensions des diverses grandeurs par rapport à $|X|$, $|Y|$, $|Z|$, suivant la même règle que dans le système ayant pour base le groupe $|L|$, $|T|$, $|F|$.

On peut ainsi concevoir un assez grand nombre de systèmes coordonnés d'unités dérivées différant entre eux par la nature d'une ou plusieurs des grandeurs dont les unités sont arbitraires.

Le *type* d'un système est indiqué par le groupe

$$(X, \quad Y, \quad Z)$$

des symboles désignant les grandeurs qui lui servent de base.

Deux systèmes qui, ayant pour bases des grandeurs de même nature, ne diffèrent que par les valeurs d'une ou plusieurs de ces grandeurs, ne sont que des variétés d'un même type. Le nombre des variétés possibles d'un type donné est illimité.

Le lecteur fera un utile exercice en cherchant dans le tableau du chapitre VI (livre I) tous les groupes de trois grandeurs en fonction desquelles peuvent être exprimées toutes les autres, suivant la méthode indiquée tout à l'heure.

Un groupe ne peut évidemment renfermer plus d'une grandeur géométrique ni plus de deux grandeurs cinématiques; de sorte que si l'on désigne par |G| une grandeur géométrique, par |C| une grandeur cinématique et par |D| une grandeur dynamique, les divers types de systèmes possibles appartiendront à l'une des cinq classes représentées par les symboles suivants :

I	|G|	|C|	|D|
II	|G|	|D|	|D|
III	|C|	|D|	|D|
IV	|C|	|C|	|D|
V	|D|	|D|	|D|

La considération du type d'un système d'unités formé suivant la règle que nous avons adoptée n'a de signification en quelque sorte qu'au moment même de la définition du système. Il faut remarquer qu'étant donné un système constitué, rien ne signale particulièrement les trois unités qui ont joué le rôle d'unités fondamentales. On peut dans ce système, en suivant la marche qui vient d'être indiquée, former un grand nombre de groupes de trois unités d'où peuvent découler toutes les autres; en sorte qu'un même système peut être envisagé successivement comme la réalisation de plusieurs types très divers.

Dans la pratique, ainsi qu'on le verra plus loin, il n'y a que deux types qu'il soit utile de considérer : le type

(L T F)

et le type

(L T M).

CHAPITRE II

Choix des unités fondamentales les plus convenables pour constituer un système universel.

—

Si, au point de vue théorique, le choix des unités fondamentales devant servir à la constitution d'un système absolu peut, comme on vient de le voir, se porter sur des groupes de grandeurs très nombreux et très divers, il n'en est pas de même au point de vue pratique.

Puisque dans un système coordonné d'unités toutes les mesures se ramènent en définitive à des mesures de grandeur fondamentales, le meilleur système, en pratique, sera celui dans lequel les mesures fondamentales pourront se faire dans les meilleures conditions possible.

Or, pour présenter tous les avantages désirables, une mesure fondamentale devra être *directe, facile, précise, possible en tous temps et en tous lieux.*

Elle possédera toutes ces qualités si l'unité peut être réalisée, matérialisée en quelque sorte en un *étalon;* si la comparaison des grandeurs de même espèce à cet étalon peut se faire au moyen d'une expérience simple; si l'on peut apprécier des sous-multiples de l'étalon d'un ordre très élevé; si cet étalon n'est susceptible d'éprouver aucune altération permanente, et si enfin on peut le retrouver identique à lui-même en tous temps et en tous lieux.

Le choix d'une *longueur* pour l'une des trois grandeurs fondamentales réunit tous ces avantages. Cette longueur peut être représentée par un étalon, savoir : la distance de deux lignes sur une règle de métal à une certaine température. D'ailleurs, on peut assigner une température qu'il est très facile de réaliser en tous temps et en tous lieux : c'est celle de la glace fondante. On pourra, par l'emploi d'une matière spéciale,

comme le platine, pur ou allié à un autre métal de sa famille, assurer à la règle une parfaite inaltérabilité chimique, et par le choix d'une forme et de dimensions convenables éviter les flexions qui pourraient en amener une déformation permanente.

Comparer une longueur $|L|$ à une longueur étalon $|\mathcal{L}|$, c'est trouver deux longueurs $|\mathcal{L}_1|$ et $|\mathcal{L}_2|$, multiples ou sous-multiples connus de l'étalon, comprenant entre elles la longueur $|L|$ et aussi voisines l'une de l'autre que possible. En prenant pour valeur numérique de $|L|$ le nombre

$$\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2),$$

on commettra une erreur moindre que

$$\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2).$$

Plus la différence $|\mathcal{L}_1| - |\mathcal{L}_2|$ sera petite, plus la précision de la mesure sera grande. Or, grâce au vernier, à la vis micrométrique et surtout à certains phénomènes optiques, on peut apprécier des différences de longueur extrêmement petites. La comparaison d'une longueur à un étalon de longueur est parmi toutes les opérations métrologiques l'une des plus précises.

Grâce à la perfection des horloges et des observations astronomiques, il est possible de réaliser en tous temps et en tous lieux une durée qui soit de la durée de la rotation de la terre sur elle-même (jour sidéral) une fraction définie connue avec une approximation très grande, et qui puisse servir, par conséquent, d'unité de durée. La comparaison d'une durée à cette unité est d'ailleurs une opération facile et très précise, car on dispose de moyens de réaliser et d'estimer des intervalles de temps extrêmement petits.

Considérons enfin un échantillon de platine. La nature de ce métal est telle que cet échantillon est aussi peu sujet que possible à des modifications physiques ou chimiques. Si l'on évite de le soumettre à des manipulations susceptibles, soit par leur nature, soit par leur fréquence, d'en déterminer une

usure sensible, il pourra demeurer indéfiniment identique à lui-même. On peut l'employer à définir une unité de force, en convenant de prendre pour cette unité son poids en un lieu déterminé. Mais ainsi il ne réalise pas, à proprement parler, un étalon de force, car le poids en question dépend de la position qu'occupe l'échantillon considéré à la surface de la terre, et n'est égal à l'unité de force qu'en un lieu particulier.

Mais si l'on emploie cet échantillon de platine à définir une unité de masse, on ne rencontre plus le même inconvénient. Sa masse est indépendante de sa position. Elle constitue un étalon possédant toutes les qualités désirables : inaltérabilité, durée, ubiquité. Les comparaisons des masses avec cet étalon seront susceptibles d'une extrême précision, puisqu'elles se feront avec la balance, qui de tous les instruments de physique est un de ceux auxquels on peut donner le plus de sensibilité.

Le choix, plus avantageux en théorie, des grandeurs fondamentales : *longueur, temps, force,* pour constituer un système coordonné d'unités dérivées, est celui qui a été fait, à l'exemple des géomètres, par les auteurs du *Système métrique.*

Le choix, plus avantageux en pratique, des grandeurs : *longueur, temps, masse,* proposé par Gauss (¹) pour constituer un système de mesures scientifiques, est aujourd'hui adopté par les savants du monde entier.

CHAPITRE III

Système métrique.

Le système métrique peut être défini un système coordonné d'unités dérivées du type

(L T F).

(¹) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata,* auctore Carlo-Frederico Gauss. Gottingae, sumtibus Dieterichianis, 1833.

Les symboles de dimensions des diverses grandeurs dans ce système sont ceux mêmes qui figurent dans le tableau du chapitre VII (livre I).

Pour distinguer ce système de tout autre du même type, il faut définir la longueur, le temps, la force qui lui servent d'unités fondamentales.

Ces unités sont respectivement le *mètre,* la *seconde,* le *kilogramme.*

Art. 1. — *Mètre.*

Le mètre a été déduit de la longueur d'un arc de méridien compris entre le parallèle de Dunkerque et le parallèle de la tour du fort de Montjouy, près de Barcelone.

Cet arc, correspondant à

$$9^{\circ},67380,$$

fut déterminé par une chaîne de 90 triangles. Une base, mesurée entre Melun et Lieursaint, servit à calculer la partie de cette méridienne comprise entre Dunkerque et Évaux; une autre base, mesurée près de Perpignan, entre Vernet et Salces, servit à calculer la partie comprise entre Évaux et Montjouy. Ces deux bases furent mesurées par Delambre à l'aide de quatre règles bi-métalliques que Borda avait comparées entre elles et à la Toise du Pérou.

On trouva que la longueur de la méridienne allant de Dunkerque à Barcelone valait 551585 fois la longueur que possède à 13° Réaumur la Toise du Pérou (1). Ayant calculé d'après cela la longueur que devait avoir le quart du méridien auquel appartenait cet arc, on la trouva de

5 130 740 toises.

Le mètre, défini comme la dix-millionième partie du quart d'un méridien, devait donc être une longueur de

$$0^{\text{toise}},5\,130\,740$$

(1) Voir la note II.

ou

$3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},296.$

Au sujet de l'étalon destiné à représenter cette longueur, la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795) édictait les prescriptions suivantes :

« Il n'y aura qu'un seul étalon des poids et mesures pour toute la République; ce sera une règle en platine sur laquelle sera tracé le mètre, qui a été adopté pour l'unité fondamentale de tout le système de mesures. Cet étalon sera exécuté avec la plus grande précision, d'après les expériences et les observations des commissaires chargés de sa détermination, et il sera déposé près du Corps législatif, ainsi que le procès-verbal des opérations qui auront servi à le déterminer. »

Pris à la lettre, ce texte indiquait que le mètre étalon prototype devait être une mesure à *traits*, c'est-à-dire portant près de ses extrémités deux traits dont la distance devait représenter le mètre. En fait, les commissaires des poids et mesures construisirent un étalon à *bouts*, c'est-à-dire une règle sur laquelle la longueur du mètre était représentée par la distance même des extrémités.

Pour étalonner le mètre définitif, Borda s'était proposé de suivre la méthode qui lui avait si bien réussi pour le mètre provisoire. La commission qui eut à s'occuper de cette opération s'écarta un peu de ce plan. Elle étudia d'abord 12 mètres en fer construits par Lenoir. L'un d'eux se trouva juste de la longueur requise et servit ensuite à étalonner tous les autres.

Une règle de platine, regardée par la commission comme ayant à la température de 0° exactement la longueur désirée, fut présentée le 4 messidor an VII au Corps législatif comme l'étalon prototype du mètre et déposée le même jour aux Archives nationales, où elle est encore actuellement dans un état parfait de conservation.

Des nombreuses mesures géodésiques effectuées dans le cours de ce siècle il résulte, d'après M. Faye, que la longueur de cette règle est contenue dans le quart d'un méridien, non pas 10 000 000 fois, mais 10 002 008 fois.

La longueur qui sert de base au système métrique et qui porte le nom de *mètre* n'est donc pas, comme le désiraient les fondateurs du système, la dix-millionième partie du quart d'un méridien ; en fait, elle est simplement la longueur que possède à la température de la glace fondante la règle de platine déposée, le 4 messidor an VII, aux Archives nationales.

Art. 2. — *Seconde.*

L'unité de temps actuellement adoptée dans le système métrique est la seconde sexagésimale de temps moyen, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{1}{86\,400}$$

du jour solaire moyen ou la fraction

$$\frac{1}{86\,164} \text{ environ}$$

du jour sidéral.

A l'origine du système, il avait été convenu que la division décimale serait exclusivement employée dans toutes les mesures. L'unité de temps choisie en conséquence avait été tout d'abord la seconde dite *décimale,* qui était la fraction

$$\frac{1}{100\,000}$$

du jour solaire moyen.

Cette unité, que quelques auteurs ont employée, a été abandonnée lorsqu'on est revenu de la division décimale du cercle à la division sexagésimale.

Art. 3. — *Kilogramme.*

L'unité de poids ou de force du système métrique est un certain poids appelé *kilogramme,* dont les auteurs du système voulurent rattacher la définition d'une façon très simple à celle du mètre, en proposant de prendre pour ce poids le poids

absolu à Paris d'un décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité.

Lefèvre-Gineau et Fabroni l'ont déduit, en reprenant les expériences de Lavoisier et Haüy, du poids d'un volume connu d'eau distillée dans les conditions requises.

Un cylindre creux de laiton étant suspendu à l'un des plateaux d'une balance par une tige creuse qui permettait à l'air intérieur de communiquer avec l'extérieur, ces physiciens déterminèrent l'effort exercé sur le fléau de la balance par ce cylindre successivement plongé dans de l'eau à 0°,3, puis dans l'air. Le volume sur lequel s'exerçait la poussée de l'eau dans la première expérience était égal au volume extérieur du cylindre augmenté du volume extérieur de la partie plongée de la tige. D'après les mesures du diamètre moyen (0^{m},2428368 à 17°,6), de la hauteur moyenne (0^{m},2437672 à 17°,6), du cylindre, du diamètre (1^{mm},285), et de la longueur de la partie plongée (43^{mm}) de la tige, le volume immergé dans l'eau à 0°,3 fut trouvé égal à 11^{dm^3},2796202.

Des résultats des deux pesées on déduisit que le poids dans le vide de 11^{dm^3},2796202 d'eau à 0°,3 était égal au poids dans le vide du multiple 11,2692387 de la masse de laiton unité employée dans les pesées comme terme de comparaison.

Ayant déterminé la variation qu'éprouve la densité de l'eau avec la température, Lefèvre-Gineau calcula que, pour avoir le poids de 11^{dm^3},2796202 d'eau à la température du maximum de densité, il fallait ajouter au poids précédent la fraction 0,00144, ce qui donnait 11,2706787. Par là, le poids d'un décimètre cube d'eau à la température du maximum de densité fut fixé à la fraction 0,9992072 de l'unité de poids arbitraire employée; et celle-ci ayant été comparée au marc moyen de la pile de Charlemagne [1], on trouvera finalement que le kilogramme devrait être équivalent à

$$18\,827^{\text{grains}},15.$$

---

[1] Voir la note III.

Une masse de platine que la Commission jugea avoir un poids, dans le vide, égal à cette valeur fut, en même temps que le mètre, présenté au Corps législatif et déposé, comme étalon prototype du kilogramme, aux Archives nationales.

De nombreuses mesures, effectuées depuis l'établissement du système métrique, ont montré que le kilogramme réel diffère légèrement du kilogramme théorique, c'est-à-dire du poids absolu à Paris d'un décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité.

On doit donc définir le kilogramme comme étant le poids absolu à Paris de la masse de platine déposée le 4 messidor an VII aux Archives nationales.

L'unité de force du système métrique (1 kilog.) agissant sur la masse de platine déposée aux Archives (kilogramme-masse) lui communiquerait une accélération égale à la valeur de g à Paris, soit une accélération représentée en unités métriques par 9,8096. La masse à laquelle cette même force communiquerait une accélération 1 vaudrait donc 9,8096 kilogrammes-masse. Telle est la masse unité du système métrique. Nous la représenterons par $|M_1|$.

Au même type (LTF) que le système métrique appartiennent les systèmes : pied (français), seconde, livre (française); pied (anglais), seconde, livre (anglaise), employés dans un grand nombre de mémoires scientifiques antérieurs à l'époque actuelle.

Dans certains cas, il pourra être utile, en vertu de la remarque faite à la fin du chapitre I (livre II), de considérer le système métrique comme un système du type (LTM) ayant pour bases le *mètre*, la *seconde* et la *masse* $|M_1|$.

Lorsque la comparaison d'une grandeur à une grandeur de son espèce prise pour unité conduit à un rapport exprimé par un nombre très grand ou très petit, ce rapport ne donne à l'esprit qu'une idée peu nette de la grandeur mesurée. Aussi est-on conduit nécessairement à employer, concurremment avec l'unité principale, des unités secondaires plus appropriées

que l'unité principale à l'évaluation des quantités beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites que cette dernière.

Dans le système métrique, on emploie comme unités secondaires des multiples ou sous-multiples décimaux des unités principales. On désigne les multiples par les préfixes ***déca, hecto, kilo,*** et les sous-multiples par les préfixes ***déci, centi, milli, micro.***

Voici, pour les grandeurs les plus usuelles, le tableau des unités secondaires, avec les notations abrégées par lesquelles on est convenu de les désigner [1] :

		LONGUEURS		SURFACES	
		mètre	m	mètre carré	m^2
mille	(k)	kilomètre	km	kilom. —	km^2
cent	(h)	hectomètre	hm	hectom. —	hm^2
dix	da	décamètre	dam	décam. —	dam^2
dixième	d	décimètre	dm	décim. —	dm^2
centième	c	centimètre	cm	centim. —	cm^2
millième	m	millimètre	mm	millim. —	mm^2
millionième	μ	micromètre ou micron	μ	»	»

		VOLUMES		CAPACITÉS		POIDS	
		mètre cube	m^3	litre	l	gramme	g
mille	(k)	»		»		kilogramme	kg
cent	(h)	»		hectolitre	hl	hectogramme	hg
dix	da	»		décalitre	dal	décagramme	dag
dixième	d	décim. cube	dm^3	décilitre	dl	décigramme	dg
centième	c	centim. —	cm^3	centilitre	cl	centigramme	cg
millième	m	millim, —	mm^3	millilitre	ml	milligramme	mg
millionième	μ	»	»	microlitre	λ	microgramme	γ

[1] Ch.-Ed. Guillaume, *Symboles et abréviations* (*Arch. des sc. phys. et nat.*, 1889, 3, XXII, p. 438).

CHAPITRE IV

Système CGS.

Reprenant une proposition faite en 1861 par l'Association britannique pour l'avancement des sciences, laquelle s'était inspirée de l'exemple de Gauss, un Congrès international d'électriciens, réuni à Paris en 1881, a voté l'adoption, pour les mesures scientifiques, d'un système coordonné d'unités ayant pour bases :

Une longueur : le *centimètre*.
Un temps : la *seconde*.
Une masse : le *gramme-masse*.

Le centimètre est la centième partie de la longueur à 0° C. de la règle de platine étalon des Archives.

La seconde est la seconde sexagésimale de temps moyen.

Le gramme-masse est la millième partie de la masse de platine déposée aux Archives pour représenter le kilogramme étalon du système métrique.

Les initiales des noms de ces trois unités fondamentales étant respectivement C, S, G, on devrait désigner le système auquel elles servent de bases par le symbole (C,S,G). Par raison d'euphonie, on a adopté le symbole

(CGS).

La définition des unités dérivées géométriques ou cinématiques dans le système (CGS) se fait de la même façon, aux valeurs près des unités fondamentales, que dans le système métrique.

Ainsi, l'unité (CGS) de surface est le *centimètre carré.*

L'unité de volume est le *centimètre cube.*

L'unité de vitesse est la *vitesse avec laquelle un centimètre est parcouru d'un mouvement uniforme en une seconde.*

L'unité d'accélération est l'*accélération en vertu de laquelle une vitesse d'un centimètre par seconde est gagnée en une seconde.*

Cette dernière unité est 100 fois plus petite que l'unité métrique. Ainsi, la valeur métrique de l'accélération de la pesanteur à Paris étant

$$9{,}8096,$$

sa valeur (CGS) sera

$$980{,}96.$$

L'unité de force est la *force capable d'imprimer au gramme-masse une accélération égale à l'unité d'accélération.* — On est convenu de désigner cette force sous le nom de *dyne* (du grec δυναμις).

Il est aisé de trouver en poids la valeur de la dyne.

Soit, en général, à trouver en poids la force unité d'un système ayant pour bases les grandeurs |L|, |T|, |M|.

Désignons par g la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur en un lieu particulier dans ce système. L'action (f^{r}) de la pesanteur sur la masse |M| lui communique une accélération g; la force unité du système |F|, qui ne communiquerait à cette même masse qu'une accélération 1, vaut g fois moins, soit

$$\frac{f^{\text{r}}}{g}.$$

L'unité de force d'un système est donc une fraction $\frac{1}{g}$ *du poids de l'unité de masse de ce système en un lieu où la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur dans ce système est g.*

Appliquons ce résultat au système (CGS).

On a, à Paris,

$$f = 1^{gr},$$
$$g = 980,96;$$

donc

$$1 \text{ dyne} = \frac{1^{gr}}{980,96},$$

et par suite

$$1^{gr} = 980,96 \text{ dynes},$$
$$1^{kg} = 980960 \text{ dynes}.$$

On remarquera que la dyne est un peu supérieure à 1 milligramme.

Les unités dérivées dynamiques sont liées au centimètre, à la seconde et à la dyne, comme les unités de même nature du système métrique sont liées au mètre, à la seconde et au kilogramme.

Ainsi, l'unité (CGS) de travail est la *dyne centimètre,* c'est-à-dire le *travail effectué par une dyne déplaçant d'un centimètre, dans sa propre direction, son point d'application.* — Cette unité de travail est désignée sous le nom d'*erg* (du grec ἔργον).

L'unité (CGS) de pression est la pression produite par le poids d'une dyne réparti uniformément sur une surface d'un centimètre carré. — Une pression valant un million de fois la précédente diffère peu de la pression d'un kilogramme par centimètre carré. On la désigne sous le nom de *barie.*

Dans le système (CGS), comme dans le système métrique, on emploie, outre les unités normales, des unités secondaires formées avec des multiples ou des sous-multiples décimaux des unités normales. On désigne ces unités secondaires par les préfixes *déca, hecto, kilo, méga,* dans le cas des multiples, et par *déci, centi, milli, micro,* dans le cas des sous-multiples. Les plus usités sont les multiples et sous-multiples correspondant aux puissances de 1000.

Voici, pour les principales grandeurs, le tableau de ces mul-

tiples et sous-multiples avec l'indication des symboles abréviatifs par lesquels on peut les désigner [1] :

		FORCE		TRAVAIL		PRESSION	
		Dyne	d	Erg	e	barie $= \frac{\text{Md}}{\text{cm}^2}$	$=$ b
million	(M)	Megadnye	Md	Megerg	Me	Megabarie	Mb
mille	(k)	kilodyne	kd	kiloerg	ke	kilobarie	kb
millième	(m)	millidyne	md	millierg	me	millibarie	mb
millionième	(μ)	microdyne	μd	microerg	μe	microbarie	μb

Le système (CGS) comprenant parmi ses grandeurs fondamentales, comme le système métrique, une longueur et un temps, les symboles de dimensions des grandeurs géométriques et cinématiques sont les mêmes dans les deux systèmes et sont ceux qui se trouvent indiqués dans le tableau du chapitre VII (livre I).

Seules les dimensions des grandeurs dynamiques sont différentes. En tirant de la relation

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{2}$$

l'expression du rapport $\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}$, soit

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|} = \frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\,\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-2},$$

et l'introduisant dans les expressions, relatives aux systèmes du type (LTF), des rapports des diverses grandeurs dynamiques, on formera, pour l'application des systèmes du type (LTM), et en particulier du système (CGS), le tableau suivant :

---

(1) Ch.-Ed. Guillaume, *Symboles et abréviations* (*Arch. des sc. phys. et nat.*, 1880, 3, XXII, p. 438).

NATURE des GRANDEURS	COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS	SYMBOLES de DIMENSIONS
Forces.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{M.L.T^{-2}}{\mathcal{M}.\mathcal{L}.\mathcal{T}^{-2}}$	MLT^{-2}
Moments.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{2}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}
Travaux.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{2}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}
Puissances mécaniques.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{2}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-3}$	$\frac{ML^2T^{-3}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-3}}$	ML^2T^{-3}
Pressions.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{-1}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{ML^{-1}T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}}$	$ML^{-1}T^{-2}$
Masses.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}$	$\frac{M}{\mathcal{M}}$	M
Densités.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{-3}$	$\frac{ML^{-3}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}}$	ML^{-3}
Moments d'inertie.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{2}$	$\frac{ML^2}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2}$	ML^2
Quantités de mouvement.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-1}$	$\frac{MLT^{-1}}{\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}}$	MLT^{-1}
Forces vives.	$\frac{\|M\|}{\|\mathcal{M}\|}\left(\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\right)^{2}\left(\frac{\|T\|}{\|\mathcal{T}\|}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}

Pour comparer les unités (CGS) à celles d'un système du type (LTF), il sera nécessaire de considérer, conformément à la remarque qui termine le chapitre I (livre II), les unités (CGS) comme formant un système du type (LTF) dérivé du *centimètre,* de la *seconde* et de la *dyne,* et alors on fera usage des formules du chapitre VI (livre I).

Au même type (LTM) que le système (CGS) appartiennent les systèmes :

millimètre, — seconde, — milligramme-masse,
mètre, — seconde, — gramme-masse,

employés l'un par Gauss et Weber, l'autre par l'Association britannique.

En appliquant le raisonnement fait plus haut à propos de la dyne, on trouve que l'unité de force du système de Gauss vaut

$$\frac{1^{mgr}}{9809,6} \text{ ou } \frac{1}{10000} \text{ dyne},$$

et celle du système de l'Association britannique

$$\frac{1^{gr}}{9,8096} \text{ ou } 100 \text{ dynes}.$$

On peut donc considérer ces deux systèmes comme appartenant au type (LTF) et ayant pour bases, l'un :

le millimètre, — la seconde, — $\frac{1}{10000}$ dyne;

l'autre :

le mètre, — la seconde, — 100 dynes.

CHAPITRE V

Solution générale des problèmes relatifs aux changements d'unités. Exemples.

Art. 1.

Soient g_1 et g_2 les valeurs numériques d'une même grandeur $|G|$ comparée successivement à deux grandeurs $|\mathcal{G}_1|$ et $|\mathcal{G}_2|$ de son espèce. On a

$$|G| = g_1\,|\mathcal{G}_1| = g_2\,|\mathcal{G}_2|;$$

d'où

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Le rapport $\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}$ est déterminé par des rapports de grandeurs

fondamentales qui, dans le cas le plus général, sont au nombre de trois. On a donc

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|}\right)^z,$$

$|\mathfrak{G}_1|$ étant définie par les grandeurs $|\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{Y}_1|$, $|\mathfrak{Z}_1|$, et $|\mathfrak{G}_2|$ par les grandeurs $|\mathfrak{X}_2|$, $|\mathfrak{Y}_2|$, $|\mathfrak{Z}_2|$.

Dans cette égalité, x, y, z sont connus dès qu'on sait de quelle espèce de grandeur $|G|$ il est question, tandis que les rapports

$$\frac{g_2}{g_1}, \; \frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|}, \; \frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|}, \; \frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|}$$

peuvent, séparément ou par groupes, se présenter comme inconnus et par conséquent donner lieu à des problèmes.

Si, dans une égalité telle que la précédente, un seul rapport est inconnu, l'égalité permettra de le déterminer.

Si deux rapports sont inconnus, il est nécessaire, pour les déterminer, d'adjoindre à cette égalité une seconde égalité renfermant au moins un des rapports inconnus.

Pareillement, on peut imaginer des groupes de trois ou quatre égalités capables de conduire à la détermination de trois ou quatre de ces rapports.

Rendons ces considérations générales plus saisissables en montrant par quelques exemples comment l'application en devra être faite.

I

Dans l'ancien système des mesures françaises, l'unité de longueur était une certaine longueur appelée *toise*.

Les sous-multiples de la toise usités concurremment avec elle étaient :

Le *pied* $=$ $\frac{1}{6}$ toise.
Le *pouce* $=$ $\frac{1}{12}$ pied $= \frac{1}{72}$ toise.
La *ligne* $= \frac{1}{12}$ pouce $= \frac{1}{144}$ pied $= \frac{1}{864}$ toise.

Un lecteur habitué à se représenter les longueurs en les comparant au mètre doit donc, en parcourant les mémoires où il est fait usage des anciennes unités, résoudre la question suivante :

Combien une longueur |L| *donnée comme égale à* θ *toises* P *pieds* p *pouces* l *lignes et une fraction* ε *vaut-elle de mètres?*

La longueur |L| est donnée comme une somme, dont les parties sont respectivement des fractions de la toise égales à

$$\theta, \quad \frac{P}{6}, \quad \frac{p}{72}, \quad \frac{l}{864}, \quad \varepsilon\frac{l}{864};$$

elle est par suite une fraction de toise égale à

$$\left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{864}\right).$$

La question qui se pose est donc la suivante :

Une longueur est une fraction l_1 *d'une longueur* $|\mathfrak{L}_1|$; *quelle fraction* l_2 *est-elle d'une autre longueur* $|\mathfrak{L}|_2$?

De l'égalité

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{|\mathfrak{L}_2|}{|\mathfrak{L}_1|}$$

on déduit

$$l_2 = l_1\frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|}.$$

Soit, dans le cas actuel, x la fraction de mètre cherchée; on aura

$$x = \left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{884}\right)\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}.$$

Or, le rapport de la toise au mètre est égal à 1,94904 (1); donc

$$x = \left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{864}\right)1{,}94904.$$

II

Toute pareille est la question de la conversion des heures, minutes et secondes sidérales, ou des heures, minutes et secondes décimales en heures, minutes et secondes sexagésimales.

(1) Log = 0,2898207.

III

Semblable aussi est la question de la conversion en grammes d'un poids exprimé à l'aide des anciennes unités de poids.

L'ancienne unité de poids était un poids appelé *livre*, dont les sous-multiples usités étaient :

Le *marc* $=$ $\frac{1}{2}$ livre.
L'*once* $=$ $\frac{1}{8}$ marc $= \frac{1}{16}$ livre.
Le *gros* $=$ $\frac{1}{8}$ once $= \frac{1}{64}$ marc $= \frac{1}{128}$ livre.
Le *grain* $= \frac{1}{72}$ gros $= \frac{1}{576}$ once $= \frac{1}{4608}$ marc $= \frac{1}{9216}$ livre.

Le rapport de la livre au gramme étant égal à

$$489{,}505847 \text{ (}^1\text{)},$$

un poids évalué à $\mathfrak{l}$ *livres*, $\mathfrak{m}$ *marcs*, $\mathfrak{o}$ *onces*, $\mathfrak{G}$ *gros*, $\mathfrak{s}$ *grains* vaudra un nombre de grammes égal à

$$\left(\mathfrak{l} + \frac{1}{2}\mathfrak{m} + \frac{1}{16}\mathfrak{o} + \frac{1}{128}\mathfrak{G} + \frac{1}{9216}\mathfrak{s}\right) 489{,}505847.$$

IV

Des expériences faites par les académiciens français le 16 avril 1738 ([2]*), il résulte que le son a parcouru la distance de l'Observatoire à Montléry en 1 minute 8 secondes ou 68 secondes. Cette distance est donnée par les observateurs comme égale à 11756 toises. On demande d'évaluer en mètres le parcours du son en une seconde dans les mêmes circonstances.*

Désignons par $\mathfrak{V}_1$ la vitesse en vertu de laquelle une longueur d'une toise est parcourue en 68 secondes, et par $\mathfrak{V}_2$ la vitesse en vertu de laquelle une longueur d'un mètre est parcourue en une seconde. Soit x le nombre de mètres cherché. On aura pour la vitesse V de propagation du son les deux évaluations

$$V = 11756\,\mathfrak{V}_1 = x\mathfrak{V}_2;$$

d'où

$$x = 11756\,\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|}.$$

---

(1) Log $= 2{,}6897569$.
(2) *Mém. de l'Ac. des Sciences pour 1738.*

Mais

$$\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|} = \frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|}\left[\frac{|\mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}_2|}\right]^{-1},$$

et ici

$$\mathfrak{L}_1 = \text{toise}, \qquad \mathfrak{T}_1 = 68 \text{ sec},$$
$$\mathfrak{L}_2 = \text{mètre}, \qquad \mathfrak{T}_2 = 1 \text{ sec};$$

donc

$$\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|} = \left(\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}\right)\left(\frac{68 \text{ sec}}{\text{sec}}\right)^{-1}$$
$$= 1.94904.\frac{1}{68};$$

par suite,

$$x = 11756.1,94904.\frac{1}{68}.$$

On trouve ainsi

$$x = 336^{\text{m}},96.$$

V

Dans quelques-unes de ses expériences sur le pendule, de Mairan se servit de sphères de cristal de roche. L'une de ces sphères lui ayant paru particulièrement bien travaillée, il eut l'idée d'en déterminer le diamètre et le poids pour calculer le poids spécifique du cristal de roche. Il évalue le diamètre à 1368 vingtièmes de ligne et le poids à 97200 grains. — Pour comparer cette détermination du poids spécifique du cristal de roche aux déterminations modernes, il faut chercher quel serait, d'après les nombres indiqués par de Mairan, le poids en grammes d'un centimètre cube de cette substance.

Le volume de la sphère de cristal vaut $\frac{1}{6}\pi(1368)^3$ fois le volume du cube ayant un vingtième de ligne de côté.

Le rapport de deux poids spécifiques étant en raison directe des poids et en raison inverse des volumes correspondants, si nous désignons par ps_1 le poids spécifique correspondant à 1 grain par cube d'un vingtième de ligne de côté, le poids spécifique du cristal de roche vaudra

$$\frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3}ps_1.$$

Si, d'autre part, nous désignons par ps_2 le poids spécifique corres-

pondant à 1 gramme par centimètre cube, le poids spécifique du cristal sera exprimé par

$$x p s_2,$$

x étant le nombre qu'il s'agit de déterminer. On posera l'équation

$$\frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3} p s_1 = x p s_2;$$

d'où

$$x = \frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3} \cdot \frac{p s_1}{p s_2}.$$

Mais

$$\frac{p s_1}{p s_2} = \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\text{cube de } \frac{1}{20} \text{ ligne}}{\text{centim cube}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\frac{1}{20} \text{ ligne}}{\text{centim}}\right)^{-3}$$

$$= \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\text{ligne}}{\text{centim}}\right)^{-3} \cdot 20^3.$$

Or (voir ci-dessus),

$$9216 \text{ grains} = 489{,}505847 \text{ grammes},$$

d'où

$$\frac{\text{grain}}{\text{gramme}} = \frac{489{,}505847}{9216};$$

d'autre part,

$$864 \text{ lignes} = 194{,}904 \text{ centim},$$

d'où

$$\frac{\text{ligne}}{\text{centim}} = \frac{194{,}904}{864}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de x, on trouve finalement

$$x = 2{,}684 \text{ [1]}.$$

---

[1] Les déterminations les plus récentes et les plus exactes faites à l'aide de pesées hydrostatiques ont donné comme valeur moyenne

$$x = 2{,}6508.$$

Art. 2.

De tous les problèmes que fait surgir dans la pratique le changement des unités, le plus fréquent est précisément le plus simple, savoir : celui qui consiste à passer de la valeur numérique d'une grandeur, obtenue dans un certain système d'unités, à la valeur numérique de cette même grandeur dans un autre système.

On a (article précédent)

$$g_2 = g_1 \frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Or ici

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$|\mathcal{X}_1|$, $|\mathcal{Y}_1|$, $|\mathcal{Z}_1|$ étant les bases du premier système, $|\mathcal{X}_2|$, $|\mathcal{Y}_2|$, $|\mathcal{Z}_2|$ celles du second, et x, y, z les dimensions de l'espèce de grandeur considérée.

EXEMPLES.

I

Pour la conversion des mesures métriques en mesures (CGS), on aura

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{M}_1}{\text{grm}} = 9809,6,$$

ou

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = 980960,$$

suivant qu'on envisagera les deux systèmes en question comme correspondant au type

$$(LTM)$$

ou au type

$$(LTF).$$

Ainsi, ayant trouvé directement (chapitre III, livre II) le rapport $\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}$, on peut en déduire le rapport $\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}$ par la formule

$$\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = \left(\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}\right)\left(\frac{\text{mètre}}{\text{cm}}\right)\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{-2},$$

qui donne

$$\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = 9809{,}60.100.1 = 980960.$$

Inversement, de la connaissance du rapport $\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}$ (chap. IV, liv. II), on peut tirer celle du rapport $\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}$ par la formule

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}} = \left(\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}\right)\left(\frac{\text{mètre}}{\text{cm}}\right)^{-1}\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{2},$$

qui donne

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}} = 980960 \cdot \frac{1}{100} \cdot 1 = 9809{,}60.$$

II

Soit $\mathcal{M}'_1$ l'unité de masse de l'ancien système français :

pied, seconde, livre.

Elle peut être aisément évaluée en fonction de $\mathcal{M}_1$. On a, d'après la formule générale relative à la comparaison de deux masses :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{M}'_1}{\mathcal{M}_1} &= \left(\frac{\text{livre}}{\text{kilog}}\right)\left(\frac{\text{pied}}{\text{mètre}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{2}\\ &= \frac{489{,}505847}{1000}\left(\frac{1}{6}\,\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}\right)^{-1}\\ &= \frac{489{,}505847}{1000}\left(\frac{1{,}94904}{6}\right)^{-1},\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{M}'_1 = \frac{6.489,505847}{1949,04}\,\mathcal{M}_1$$

$$= \frac{6.489,505847}{1949,04}\cdot 9809,6 \text{ grm}.$$

Pour la conversion des mesures de ce système en mesures (CGS), on aura donc

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = 32.484,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\mathcal{M}'_1}{\text{grm}} = \frac{6.489,505847.9809,6}{1949,04} \overset{(1)}{=} 14782,3,$$

ou

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = 32,484,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{livre}}{\text{dyne}} = 489,505847.98096 \overset{(2)}{=} 480185,6,$$

suivant qu'on fera usage des symboles en (LTM) ou en (LTF).

III

Soit $\mathcal{M}''_1$ l'unité de masse de l'ancien système anglais :

pied, seconde, livre [3],

---

(1) Log = 4.1697408.

(2) Log = 5.6814091.

(3) Pour faire ces conversions, nous adopterons les rapports des mesures anglaises aux mesures françaises qui résultent des plus récentes comparaisons, savoir :

1 mètre = 39.36980 pouces anglais;

d'où 1 yard = 3 pieds = 36 pouces = 91cm.44064

(U. S. Coast and Geodetic Survey's. — Bulletin n° 9, 15 juin 1889.)

et 1 kilog = 15432,35639 grains;

d'où 1 livre = 7000 grains = 453.5924.

On a

$$\frac{\mathcal{M}_1'}{\mathcal{M}_1} = \left(\frac{\text{livre}}{\text{kilog}}\right)\left(\frac{\text{pied}}{\text{mètre}}\right)^{-1}\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^2$$

$$= \frac{453,5924}{1000}\left(\frac{1}{3}\,\frac{\text{yard}}{\text{mètre}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{453,5924}{1000}\left(\frac{0,9144064}{3}\right)^{-1},$$

d'où

$$\mathcal{M}_1' = \frac{453,5924.3}{914,4064}\cdot 9809,6 \text{ grm}.$$

Pour les conversions des mesures anglaises en mesures (CGS), on aura donc

$$\frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = \frac{91,44064}{3} = 30,48021,\ ^{(1)}$$

$$\frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|} = \frac{\mathcal{M}_1'}{\text{grm}} = \frac{453,5924.3.9809,6}{914,4064} = 14598,1,\ ^{(2)}$$

ou

$$\frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = \frac{91,44064}{3} = 30,48021,$$

$$\frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|} = \frac{\text{livre}}{\text{dyne}} = 453,5924.980,96 = 444956.\ ^{(3)}$$

IV

Pour la conversion des mesures de Gauss en mesures (CGS), on aura

$$\frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|} = \frac{\text{millim}}{\text{cm}} = 0,1,$$

$$\frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|} = \frac{\text{milligm}}{\text{grm}} = 0,001.$$

(1) Log = 1.4840192.
(2) Log = 4.1642979.
(3) Log = 5.6483171.

V

Enfin, les conversions des mesures de l'Association britannique en mesures (CGS) se feront au moyen des valeurs

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{grm}}{\text{grm}} = 1.$$

Par exemple, cherchons les valeurs (CGS) de l'unité de densité dans les deux derniers systèmes. On a en général

$$\frac{|\mathfrak{D}_1|}{|\mathfrak{D}_2|} = \frac{|\mathcal{M}_1|}{|\mathcal{M}_2|} \left(\frac{|\mathcal{L}_1|}{|\mathcal{L}_2|}\right)^{-3},$$

ce qui donne :

1° Pour le système de Gauss :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_1| &= 0{,}001\ (0{,}1)^{-3}\ |\mathfrak{D}_2| \\ &= \frac{0{,}001}{(0{,}1)^3}\ |\mathfrak{D}_2| \\ &= |\mathfrak{D}_2|; \end{aligned}$$

2° Pour le système de l'Association britannique :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_1| &= 1.(100)^{-3}\,|\mathfrak{D}_2| \\ &= \frac{1}{1000000}\,|\mathfrak{D}_2|. \end{aligned}$$

La densité d'un corps donné sera donc représentée dans le système de Gauss par le même nombre que dans le système (CGS), et dans le système de l'Association britannique par un nombre 1,000,000 fois plus grand.

On peut le vérifier en cherchant par exemple la valeur de la densité de l'eau à 4° dans les systèmes en question. Pour cela, il suffira de considérer dans chaque système l'unité de volume d'eau et de calculer sa masse, en divisant la valeur numérique de son poids par la valeur numérique de g.

Dans le système (CGS), l'unité de volume est le centimètre cube, dont le poids (1 gr.) vaut 980,96. D'ailleurs $g = 980,96$. Donc

$$d = \frac{980,96}{980,96} = 1.$$

Dans le système de Gauss, l'unité de volume est le millimètre cube, dont le poids (1 mgr.) vaut 9809,6 fois l'unité de force de ce système (voir chapitre IV). D'ailleurs $g = 9809,6$. Donc

$$d = \frac{9809,6}{9809,6} = 1.$$

Dans le système de l'Association britannique, l'unité de volume est le mètre cube, dont le poids (100^3 gr.) vaut 9809600 fois l'unité de force de ce système (voir chapitre IV). D'ailleurs $g = 9,8096$. Donc

$$d = \frac{9809600}{9,8096} = 100^3.$$

Dans le système (CGS), la densité de l'eau à 4° est égale à l'unité de densité. C'est pour cette raison que ce système a été préféré à celui de l'Association britannique, où cette relation simple n'a pas lieu.

Art. 3.

Pour donner une idée des questions dans lesquelles se présenteraient plusieurs inconnues à la fois et montrer que les considérations générales exposées au commencement de ce chapitre s'appliquent avec une égale facilité à tous les cas, nous résoudrons le problème suivant :

On dispose, pour évaluer les longueurs, d'une règle de longueur $|\mathfrak{L}|$, *et pour évaluer les intervalles de temps, d'un appareil marquant un intervalle de temps* $|\mathfrak{T}|$.

D'une part, on observe que le son parcourt une distance valant n fois $|\mathfrak{L}|$ *pendant le temps* $|\mathfrak{T}|$, *dans des circonstances où l'on sait que sa vitesse est de v mètres par seconde.*

D'autre part, on trouve que pour faire une oscillation pendant l'intervalle de temps $|\mathfrak{T}|$, *un pendule doit avoir une longueur égale à l fois* $|\mathfrak{L}|$ *en un lieu où l'on sait que l'accélération due à la pesanteur est de g mètres par seconde.*

Il s'agit de déduire de ces deux résultats le rapport de $|\mathfrak{L}|$ *au mètre et de* $|\mathfrak{T}|$ *à la seconde.*

Désignons par $|V_1|$ la vitesse par laquelle une longueur $|\mathfrak{L}|$ est parcourue en un temps $|\mathfrak{T}|$ et par $|V_2|$ la vitesse par laquelle un mètre est parcouru en une seconde. D'après l'énoncé, la vitesse du son vaut n fois la première et v fois la seconde. On a donc l'équation

$$n|V_1| = v|V_2|,$$

ou

$$\frac{v}{n} = \frac{|V_1|}{|V_2|},$$

ou

$$\frac{v}{n} = \frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}_2|}\right)^{-1},$$

ou enfin

(1) $$\frac{v}{n} = \frac{|\mathfrak{L}|}{(\text{mètre})} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}|}{(\text{sec})}\right)^{-1}.$$

Désignons par $|A_1|$ l'accélération par laquelle la vitesse $|V_1|$ est gagnée en un temps $|\mathfrak{T}|$, et par $|A_2|$ l'accélération par laquelle la vitesse $|V_2|$ est gagnée en une seconde. L'accélération de la pesanteur au lieu considéré vaut a fois la première et g fois la seconde, d'où l'équation

$$a|A_1| = g|A_2|.$$

Or, d'après la théorie du pendule, on a

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ou

$$a = \pi^2 l.$$

Donc

$$\pi^2 l|A_1| = g|A_2|$$

ou

$$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|A_1|}{|A_2|}$$

ou

$$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}_2|}\right)^{-2}$$

ou enfin

(2) $$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|\mathfrak{L}|}{(\text{mètre})} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}|}{(\text{sec})}\right)^{-2}.$$

Les équations (1) et (2) résolvent la question.

En divisant la première par la seconde, on aura

$$\frac{v}{n} \cdot \pi^2 \frac{l}{g} = \frac{|\mathfrak{T}|}{(\text{sec})},$$

et en multipliant les deux termes de la première respectivement par ceux de l'égalité précédente :

$$\frac{v^2}{n^2} \cdot \pi^2 \frac{l}{g} = \frac{|\mathfrak{L}|}{(\text{mètre})}.$$

Tous les problèmes que l'on pourra rencontrer à propos des changements d'unités seront, on le voit, faciles à résoudre si l'on sait ramener au type général que nous avons considéré au commencement de ce chapitre l'égalité à laquelle équivaut chaque donnée.

Pour être complet, un énoncé doit fournir le moyen d'écrire autant d'égalités qu'il signale d'inconnues à déterminer.

CHAPITRE VI

Calculs symboliques.

Lorsqu'on a acquis la parfaite intelligence des questions relatives aux changements d'unités, on peut abréger notablement l'écriture dans la solution des problèmes, en faisant usage d'une notation particulière et d'un calcul symbolique dont voici les principes fort simples.

Une grandeur $|\mathfrak{G}_1|$ de l'espèce $|\mathfrak{G}|$ se distingue de toute autre de la même espèce par les valeurs $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ des grandeurs fondamentales dont elle dépend, valeurs qui spécifient cette grandeur et sont indispensables à connaître pour calculer son rapport aux autres grandeurs de son espèce.

Au lieu de représenter la grandeur $|\mathfrak{G}_1|$ par son nom ou son

initiale, il y a avantage à se servir d'un symbole réalisant en quelque sorte son signalement, qui est composé avec les noms des grandeurs $|\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{Y}_1|$, $|\mathfrak{Z}_1|$ disposés de la même façon que les lettres $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ dans le symbole des dimensions de l'espèce de grandeur en question.

Ce mode de notation consistera, par exemple, à représenter la surface d'un mètre carré par le symbole

$$(\text{mètre})^2;$$

la vitesse d'un mètre par seconde, par le symbole

$$\frac{\text{mètre}}{\text{sec}};$$

l'accélération en vertu de laquelle une vitesse d'un mètre par seconde est gagnée en une seconde, par le symbole

$$\frac{\text{mètre}}{(\text{sec})^2};$$

l'accélération de la pesanteur à Paris, par le symbole

$$\frac{9{,}8096 \text{ mètres}}{(\text{sec})^2};$$

la force d'une dyne, par le symbole

$$\frac{\text{grm.cm}}{(\text{sec})^2};$$

la masse d'un gramme, par le symbole

$$\frac{\text{dyne.sec}^2}{\text{cm}},$$

etc.

A cette définition des symboles, nous joindrons la convention qu'un symbole précédé d'un nombre k représentera une grandeur valant k fois la première. Ainsi, le symbole

$$9{,}8096 \frac{\text{mètre}}{\text{sec}^2}$$

représentera une accélération valant 9,8096 fois l'accélération $\frac{\text{mètre}}{\text{sec}^2}$.

Ces symboles sont particulièrement clairs et précis. Par leur construction, tirée du symbole des dimensions de la grandeur qu'ils représentent, ils rappellent le genre de cette grandeur; par les noms des grandeurs qu'ils renferment ils la spécifient et offrent ainsi tout ce qui est nécessaire pour trouver son rapport à toute autre grandeur de la même espèce, donnée de la même façon. Mais ce qui en constitue le principal intérêt et la réelle utilité, c'est qu'ils peuvent être l'objet d'un calcul conduisant rapidement à la solution des questions relatives aux transformations de mesures.

La justification de toutes les opérations constituant ce calcul repose sur cette remarque fondamentale, ressortant immédiatement de la définition même des symboles, que le rapport de deux grandeurs $|\mathcal{G}_1|$, $|\mathcal{G}_2|$ de même espèce est une expression qu'on peut obtenir en divisant l'un par l'autre, suivant les règles du calcul algébrique, les symboles

$$|\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$
$$|\mathcal{X}_2|^x \, |\mathcal{Y}_2|^y \, |\mathcal{Z}_2|^z,$$

qui les représentent. — En effet, l'expression de ce rapport est

$$\left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Traiter les symboles en question en tous points comme les monômes algébriques dont ils ont l'apparence, telle est la règle unique et fort simple de ce calcul symbolique.

Toutefois, pour bien pénétrer le sens de cette règle et en faire aisément l'application, il n'est pas inutile d'en chercher et d'en formuler les principales conséquences.

Définitions. — Pour la commodité des énoncés, les explications qui précèdent étant de nature à éviter toute méprise, nous appliquerons aux symboles la terminologie en usage dans la théorie des fractions; c'est-à-dire que nous désignerons

par *numérateur* du symbole l'ensemble des symboles élémentaires (noms et chiffres) écrits au-dessus du trait horizontal, et par *dénominateur* tout ce qui figurera au-dessous. — Si un nombre est détaché en vedette au-devant du trait, nous l'appellerons *coefficient,* qu'il soit d'ailleurs entier ou fractionnaire. — Nous dirons que chaque terme (numérateur ou dénominateur) du symbole est formé d'autant de *facteurs* qu'il comprendra de nombres ou de noms, chaque facteur devant être compté autant de fois que son exposant renferme d'unités.

Pour exprimer que deux symboles représentent la même grandeur ou sont *échangeables,* nous écrirons entre eux le signe =, et nous donnerons à l'expression ainsi obtenue le nom d'*équation symbolique.*

I

Opérations relatives aux symboles considérés isolément.

1. Considérons la grandeur $|\mathcal{G}_1|$ représentée par le symbole

$$|\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z$$

et la grandeur $|\mathcal{G}'_1|$ représentée par le symbole

$$|\mathcal{X}'_1|^x \, |\mathcal{Y}'_1|^y \, |\mathcal{Z}'_1|^z,$$

formé en remplaçant $|\mathcal{X}_1|$ $|\mathcal{Y}_1|$ $|\mathcal{Z}_1|$ respectivement par des grandeurs équivalentes. Leurs rapports à une troisième grandeur $|\mathcal{G}_2|$ de la même espèce sont respectivement, en vertu de la définition même des symboles,

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|\mathcal{X}'_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}'_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}'_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Or, ces expressions sont égales. Donc

$$\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}_1,$$

et par conséquent *un symbole ne cesse pas de représenter une même grandeur si l'on remplace un ou plusieurs de ses facteurs par des expressions équivalentes.*

Ainsi, les symboles

$$\frac{9.8096 \text{ mètre}}{\text{sec}^2}, \quad \frac{9.8096.100 \text{ cm}}{\text{sec}^2}, \quad \frac{9.8096.100 \text{ cm}}{(\frac{1}{60}\text{ min})^2}$$

représentent la même accélération et sont échangeables.

2. Considérons la grandeur $|\mathcal{G}_1|$ représentée par le symbole

$$|k\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z$$

et la grandeur $|\mathcal{G}'_1|$ représentée par le symbole

$$k^x |\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$

formé en appliquant au premier, pour isoler le facteur k, les règles du calcul algébrique. Leurs rapports à une troisième grandeur $|\mathcal{G}_2|$ sont respectivement

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|k\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|} = k^x \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Or, il est clair que ces rapports sont égaux et que par suite

$$\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}_1.$$

Donc deux symboles tels que

$$|k\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$
$$k^x |\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$

représentent une seule et même grandeur.

En d'autres termes, *un symbole ne cesse pas de représenter la même grandeur si l'on détache et met en coefficient, suivant les règles du calcul algébrique, un facteur numérique impliqué dans le numérateur ou le dénominateur.*

Ainsi, les symboles

$$\frac{9\,8096 \text{ mètre}}{(\frac{1}{60}\text{ min})^2},\quad 9{,}8096\,\frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\text{ min})^2},\quad \frac{9{,}8096}{\frac{1}{3600}}\cdot\frac{\text{mèt}}{(\text{min})^2}$$

représentent la même accélération et sont échangeables.

3. Quand un facteur numérique est ainsi mis en coefficient dans le symbole d'une grandeur $|\mathcal{G}'_1|$, l'expression qui vient après représente une grandeur $|\mathcal{G}''_1|$ de même espèce que la première, et $|\mathcal{G}'_1|$ vaut $|\mathcal{G}''_1|$ un nombre de fois marqué par ce coefficient.

Ainsi,

$$k^x\,|\mathcal{X}_1|^x\,|\mathcal{Y}_1|^y\,|\mathcal{Z}_1|^z$$

représentant une grandeur $|\mathcal{G}'_1|$, le symbole

$$|\mathcal{X}_1|^x\,|\mathcal{Y}_1|^y\,|\mathcal{Z}_1|^z$$

représente une grandeur $|\mathcal{G}''_1|$ que $|\mathcal{G}'_1|$ vaut k^x fois, car on a

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|} = k^x\,\frac{|\mathcal{G}''_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Exemple. — Le symbole

$$\frac{100 \text{ cm}}{\frac{1}{60}\text{ min}}$$

représente la vitesse d'un mètre par seconde; le symbole

$$\frac{\text{cm}}{\text{min}},$$

la vitesse d'un centimètre par minute, et le facteur

$$\frac{100}{\frac{1}{60}} \text{ ou } 6000,$$

le rapport de la première à la seconde.

II

Opérations relatives aux équations symboliques.

1. Une équation symbolique n'est pas troublée si l'on modifie un des membres ou tous les deux en effectuant sur un les

opérations 1 et 2 qui viennent d'être définies, car ces opérations n'altérant pas la signification des symboles, ceux-ci demeurent échangeables.

Ainsi, l'équation

$$\frac{9,8096 \text{ mètre}}{\text{sec}^2} = 9,8096 \frac{100 \text{ cm}}{\text{sec}^2}$$

entraîne les suivantes :

$$\frac{9,8096 \text{ mètre}}{(\frac{1}{60} \text{ min})^2} = 980,96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

$$\frac{9,8096 \text{ mètre}}{\frac{1}{3600} (\text{min})^2} = 980,96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

2. Une équation symbolique n'est pas troublée si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres par un même nombre k, car en opérant ainsi on transforme les symboles primitifs qui représentent une même grandeur $|\mathcal{G}_1|$ en d'autres qui représentent une même grandeur $k|\mathcal{G}_1|$ ou $\frac{1}{k}|\mathcal{G}_1|$.

Ainsi, de l'équation

$$\frac{3600.9,8086 \text{ mètre}}{\text{min}^2} = 980,86 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

on déduit

$$36 \frac{\text{mètre}}{\text{min}^2} = \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

3. Si des deux membres d'une équation symbolique on supprime des facteurs non numériques équivalents jouant le même rôle, on transforme la première équation en une autre, car les symboles qui restent sont composés de symboles élémentaires respectivement équivalents et semblablement disposés.

On passe ainsi d'une équation entre deux symboles représentant une grandeur $|\mathcal{G}|$ à une équation entre deux symboles représentant une grandeur de nature différente $|\Gamma|$.

Ainsi, de l'équation

$$\frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

on déduit

$$\frac{\text{mètre}}{\frac{1}{60}\ \text{min}} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ou

$$60\,\frac{\text{mètre}}{\text{min}} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ou

$$6\,\frac{\text{mètre}}{\text{min}} = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

et enfin

$$6\ \text{mètre} = \frac{10\ \text{cm}}{\frac{1}{60}}.$$

4. On peut aussi faire l'inverse de l'opération précédente et transformer une équation symbolique en une autre par l'introduction dans les deux membres de facteurs non numériques équivalents.

Ainsi, de l'équation

$$\text{mètre} = 100\ \text{cm},$$

on peut déduire

$$\frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

On a pu déjà pressentir, dans le cours de cet exposé, la grande facilité que doit offrir le calcul symbolique pour la solution des problèmes relatifs aux changements d'unités. Ce calcul permet d'effectuer aisément et rapidement les transformations de symboles les plus variées. Or les problèmes en question ne sont, au fond, pas autre chose que des recherches d'équivalences de symboles. Leur mise en équations consiste simplement à égaler, autant de fois que l'exige le nombre des inconnues, deux symboles équivalents formés au moyen des données et des inconnues. Leur solution repose sur la remarque suivante, conséquence de celles qui précèdent :

On obtient une expression représentant la valeur symbolique d'un facteur, numérique ou autre, figurant dans une équation symbolique en résolvant, par rapport à ce facteur, l'équation symbolique suivant les règles du calcul algébrique; en sorte qu'on peut obtenir les valeurs des facteurs inconnus en traitant les systèmes d'équations symboliques comme les systèmes d'équations algébriques.

Pour mettre cette méthode de calcul en parallèle avec la méthode ordinaire et ne laisser, par suite, aucun doute sur ses avantages, nous ne saurions mieux faire que de l'appliquer d'abord à la solution des problèmes examinés au commencement du chapitre précédent.

La question qui fait l'objet du problème IV (art. 1) revient, si l'on se place au point de vue du calcul symbolique, à chercher de quel coefficient x il faut affecter le symbole $\frac{\text{mètre}}{\text{sec}}$ pour avoir l'expression de la vitesse du son, dont les données fournissent d'autre part l'expression $\frac{11756.\text{toises}}{68 \text{ sec}}$. Ce coefficient sera donc déterminé par l'équation

$$x.\frac{\text{mètre}}{\text{sec}} = \frac{11756.\text{toise}}{68 \text{ sec}},$$

d'où

$$x = \frac{11756}{68}.\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}.$$

De même la solution du problème V consiste à trouver le coefficient x, dont il faut affecter le symbole $\frac{\text{gr}}{(\text{cm})^3}$ pour pouvoir l'identifier avec l'expression symbolique du poids spécifique du cristal de roche que fournissent les données. On est ainsi conduit à résoudre l'équation symbolique

$$x.\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = \frac{97200.\text{grains}}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3\left(\frac{1}{20}\text{ ligne}\right)^3},$$

qui donne

$$x = \frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3\left(\frac{1}{20}\right)^3}\,\frac{\text{grain}}{\text{gr}}\left(\frac{\text{cm}}{\text{ligne}}\right)^3.$$

Les problèmes de l'article 2 sont du même genre.

Soit, en général, à trouver en fonction du gramme-masse la masse unité $|\mathfrak{M}| = (x \,\text{grm})$ d'un système ayant pour bases les grandeurs

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{F}|.$$

On écrira l'équation

$$\frac{|\mathfrak{F}|\,|\mathfrak{T}|^2}{|\mathfrak{L}|} = x\,\frac{\text{dyne}\,(\text{sec})^2}{\text{cm}},$$

d'où

$$|\mathfrak{M}| = \left(\frac{|\mathfrak{F}|}{\text{dyne}}\right)\left(\frac{\text{cm}}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{\text{sec}}\right)^2 \text{grm}.$$

De même pour trouver en fonction de la dyne la force unité, $|\mathfrak{F}| = x$ dynes, d'un système ayant pour base les grandeurs

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{M}|,$$

on aura l'équation

$$\frac{|\mathfrak{M}|\,|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|^2} = x\,\frac{\text{grm.cm}}{(\text{sec})^2},$$

d'où

$$|\mathfrak{F}| = \left(\frac{|\mathfrak{M}|}{\text{grm}}\right)\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{cm}}\right)\left(\frac{\text{sec}}{|\mathfrak{T}|}\right)^2 \text{dyne}.$$

Pour la solution du problème de l'art. 3, on traduira immédiatement l'énoncé par les deux équations

$$\frac{n\,|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|} = v\,\frac{\text{mèt}}{\text{sec}},$$

$$\pi^2 l\,\frac{|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|^2} = g\,\frac{\text{mèt}}{\text{sec}^2}.$$

Voici enfin, avec leur mise en équation, quelques exercices supplémentaires :

I

Trouver la valeur du nœud marin par la condition qu'un nœud par demi-minute représente une vitesse d'un mille ($1852^{\text{m}},2$) par heure.

$$\frac{\text{nœud}}{\frac{1}{2}\,\text{min}} = \frac{1852{,}2\ \text{mèt}}{\text{heure}}.$$

II

Trouver la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur à Paris dans le système pied-seconde-livre.

$$x\frac{\text{pied}}{\text{sec}^2} = 980{,}96\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

III

Exprimer la densité de l'eau à 4° dans le système métrique et dans le système pied-seconde-livre.

$$x\,\frac{\text{M}_1}{\text{mèt}^3} = 1\cdot\frac{\text{grm}}{\text{cm}^3},$$

$$x'\,\frac{\text{M}'_1}{\text{pied}^3} = 1\cdot\frac{\text{grm}}{\text{cm}^3}.$$

IV

Quelle masse m faudrait-il adjoindre au centimètre et à la seconde pour que l'unité de force du système fondé sur ces bases fût égale à 1 gr.?

$$\frac{m.\text{cm}}{\text{sec}^2} = 980{,}96\,\frac{\text{grm.cm}}{\text{sec}^2}.$$

V

Que vaut en kilomètre par seconde l'unité de vitesse d'un système dans lequel l'unité de longueur serait le quart d'un méridien terrestre et l'unité de temps $\frac{1}{10}$ de seconde?

$$x\,\frac{\text{kilom}}{\text{sec}} = \frac{\text{quadrant}}{\frac{1}{10}\,\text{sec}}.$$

LIVRE III

Application des systèmes absolus d'unités géométriques et mécaniques à l'étude des phénomènes physiques et en particulier des phénomènes électriques et magnétiques.

CHAPITRE I

Lois physiques. Influence des changements d'unités sur les formules qui les expriment.

Art. 1.

Les objets immédiats de nos mesures dans l'étude des phénomènes physiques ne sont et ne sauraient être que des grandeurs géométriques et mécaniques nous servant à caractériser soit l'état des corps, soit leurs relations mutuelles, soit les changements qui surviennent dans cet état ou ces relations.

Dans tout phénomène l'analyse découvre au moins deux grandeurs dépendant l'une de l'autre, de telle sorte que la variation de l'une détermine la variation de l'autre. — Ainsi, dans le phénomène de la chute d'un corps, la vitesse finale dépend de la hauteur de chute; dans le phénomène de l'étirement d'une tige, l'allongement dépend de la force de traction, etc.

Il arrive le plus souvent qu'une grandeur est liée de cette façon à plusieurs autres : par exemple, l'allongement d'une tige étirée dépend non seulement de la force de traction, mais encore de la longueur initiale et de la section de la tige.

Les variations des grandeurs ainsi liées ne sont pas seulement concomitantes; elles ont entre elles une connexion plus étroite : elles se déterminent les unes les autres quantitativement. En d'autres termes, il existe entre leurs mesures des relations numériques déterminées.

Ces relations constituent ce qu'on appelle les *lois* des phénomènes en question.

Par exemple, entre la valeur numérique V_t de la vitesse acquise par un corps qui tombe en chute libre et la valeur numérique L de la hauteur de chute existe la relation

$$\frac{V_t}{\sqrt{L}} = \text{const.} = K.$$

Entre la valeur numérique l de l'allongement d'une tige étirée et les valeurs numériques F, L, S de la force de traction, de la longueur initiale de la tige et de sa section existe la relation

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = \text{const.} = H.$$

Il est des phénomènes dont les circonstances déterminantes peuvent être entièrement définies par des données géométriques ou mécaniques assignables explicitement. Ces phénomènes sont déterminables à l'avance et leurs effets sont calculables par la simple application des principes de la mécanique, sans aucun appel supplémentaire à l'expérience. — Ainsi les seuls principes de la mécanique rationnelle permettent d'établir que dans un mouvement produit par une force constante existe entre les valeurs numériques V, A, L de la vitesse du mobile, de l'accélération et de l'espace parcouru, la relation

$$\frac{V_t}{\sqrt{A.L}} = \sqrt{2}.$$

Il est des phénomènes, en bien plus grand nombre, dont

nous ne sommes en état d'assigner qu'en partie les circonstances géométriques et mécaniques déterminantes. Entre les valeurs numériques des effets et les valeurs numériques des quelques données que nous pouvons atteindre existent des relations; mais ces relations doivent être demandées à l'expérience, car elles impliquent des données qui nous manquent et résultent d'un mécanisme qui nous est inconnu.

C'est le cas, par exemple, des phénomènes dépendant de ce que nous appelons la *nature* des corps qui en sont le siège. — Ainsi dans l'ignorance où nous sommes des caractères géométriques ou mécaniques qui distinguent une substance d'une autre; dans l'ignorance aussi où nous sommes du mécanisme suivant lequel une traction produit l'allongement d'une tige, nous ne pouvons établir *a priori* la relation existant entre les valeurs numériques de la cause, de l'effet et de toutes les grandeurs qui influent sur ce phénomène.

Tel est aussi le cas des phénomènes relatifs à l'*attraction universelle,* aux *attractions et répulsions électriques,* aux *attractions et répulsions magnétiques,* aux *attractions et répulsions électromagnétiques,* aux *attractions et répulsions électrodynamiques.* On a toutefois reconnu que dans une étude élémentaire de ces phénomènes on peut supposer que tout se passe comme si les actions qu'on observe étaient des résultantes d'actions s'exerçant entre les éléments des corps en présence; et le rôle de l'expérience dans cette étude s'est trouvé par là réduit à l'établissement de la formule de ces actions élémentaires et à la vérification des conséquences que le calcul en déduit.

Par exemple, les observations astronomiques vérifient tous les jours que les mouvements des corps célestes peuvent être calculés en supposant, comme l'a indiqué Newton, que les éléments de ces corps s'attirent deux à deux proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Si l'on désigne par dF la valeur numérique de l'attraction supposée entre deux éléments de masses valant

respectivement dM dM' et placés à une distance L l'un de l'autre, la proposition fondamentale sur laquelle repose la théorie de l'attraction universelle se traduira par la formule

$$\frac{dF}{\frac{dM.dM'}{L^2}} = \text{const.} = N.$$

On déduit de là que deux sphères sont sollicitées à se porter l'une vers l'autre par une force telle qu'entre sa valeur numérique F, les valeurs numériques MM' des deux masses et la valeur numérique L de la distance des centres existe la relation

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N.$$

La réalisation expérimentale de ce cas particulier permet de déterminer N, et l'étude de tous les autres cas peut ensuite être faite numériquement.

Dans toutes les parties de la physique les efforts des théoriciens tendent ainsi à ramener l'étude des phénomènes au développement des conséquences d'une ou plusieurs lois fondamentales suggérées par l'expérience.

Art. 2.

Si l'on jette un coup d'œil d'ensemble sur les formules algébriques exprimant les lois relatives aux divers phénomènes physiques, on y voit intervenir six espèces de lettres correspondant à autant d'espèces de nombres :

1° Des lettres représentant des coefficients numériques absolument déterminés et invariables.

Telle est la lettre π de la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

relative au pendule simple.

2° Des lettres représentant des valeurs numériques de grandeurs géométriques ou mécaniques.

Telles sont les lettres l, F, L, S de la formule

$$\frac{\frac{l}{FL}}{S} = H,$$

ou encore les lettres F, M, M', L, de la formule

$$\frac{\frac{F}{MM'}}{L^2} = N.$$

3° Des lettres représentant des paramètres dépendant de la température.

Telle est la lettre Θ dans la formule

$$\frac{PV}{\theta} = R,$$

relative aux gaz parfaits.

4° Des lettres représentant des coefficients parasites introduits par un choix défectueux d'unités.

Telle serait une lettre représentant l'équivalent d'un degré en radians; telle est la lettre E représentant dans les formules de la thermodynamique l'équivalent mécanique de la calorie.

5° Des lettres représentant des paramètres caractéristiques soit de la nature des corps, soit de la nature des milieux qui sont le siège des phénomènes.

Telles sont les lettres H, R, N des formules

$$\frac{\frac{l}{FL}}{S} = H,$$

$$\frac{P.V}{\theta} = R,$$

$$\frac{\frac{F}{MM'}}{L^2} = N,$$

rappelées tout à l'heure.

6° Des lettres représentant des grandeurs spéciales à certains ordres de phénomènes et servant à exprimer dans un langage de convention les liens existant entre les grandeurs géométriques et mécaniques que nous pouvons saisir dans ces phénomènes, dont le véritable mécanisme nous est en partie ou en totalité inconnu.

Telles sont les lettres représentant des masses électriques, des masses magnétiques, des intensités de courants et toutes les grandeurs définies au moyen de celles-là dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques.

Toutes les formules fondamentales qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques peuvent être envisagées comme exprimant la constance, dans les cas particuliers d'un même phénomène, d'un monôme constitué avec les valeurs de diverses grandeurs et de divers paramètres relatifs à ce phénomène dans ces cas particuliers; en sorte que si l'on désigne par h un coefficient numérique; par X, ..., F les mesures de grandeurs géométriques et mécaniques; par Θ une fonction du paramètre t caractérisant la température; par U un coefficient parasite; par $\mathcal{G}\mathcal{G}'$ les mesures de diverses grandeurs spéciales; par K un paramètre spécifique, on peut rapporter toutes ces formules à un type général représenté par le symbole

$$h.X^x \ldots F.\Theta.U.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'} = \text{const.} = K,$$

où sont réunies toutes les catégories de lettres que nous avons distinguées tout à l'heure.

Supposons que pour les mesures immédiates auxquelles donne lieu l'étude quantitative des divers phénomènes physiques on fasse usage du meilleur ensemble d'unités géométriques et mécaniques qu'il soit possible de constituer, c'est-à-dire, ainsi que nous l'avons reconnu, d'un système absolu ayant pour bases trois unités fondamentales, et cherchons quelle influence le choix de ces unités fondamentales peut avoir sur les valeurs numériques représentées par les diverses catégories de lettres que nous avons passées en revue, et par

suite quel changement occasionne dans les formules un changement de ces unités.

Le choix en question est sans influence sur les coefficients numériques absolus qui, comme π, représentent des rapports de quantités fixes.

Nous connaissons, d'autre part, son influence sur les mesures des grandeurs géométriques et mécaniques. Nous savons que l'emploi d'unités absolues offre l'avantage de n'introduire, dans les formules, du chef des grandeurs de cette nature, aucun coefficient parasite. De cette façon, par exemple, les formules de la thermodynamique ne renferment qu'un coefficient parasite : l'équivalent mécanique de la chaleur, dont on peut d'ailleurs facilement les débarrasser par un choix convenable de l'unité de quantité de chaleur.

Le paramètre par lequel on est convenu de caractériser, dans l'échelle normale actuellement adoptée, l'état calorifique désigné sous le nom de température se calcule, en dernière analyse, au moyen de nombres fournis par des mesures de pression. Soient P_G et P_{Aq} les valeurs numériques de la force élastique d'une masse d'hydrogène, de volume constant, à la température de la glace fondante et à la température d'ébullition de l'eau sous la pression normale. Soit, d'autre part, P_t la valeur numérique de la force élastique de cette même masse d'hydrogène à une autre température qu'il s'agit de désigner par un paramètre t. On est convenu de prendre pour ce paramètre le nombre

$$t = \frac{P_t - P_G}{\frac{1}{100}(P_{Aq} - P_G)}.$$

Ce nombre est évidemment indépendant de l'unité de pression employée à la détermination des forces élastiques P_G, P_{Aq}, P_t. Le choix des unités géométriques et mécaniques est donc sans influence sur la valeur numérique du paramètre désignant, dans l'échelle normale, une température donnée, et par suite sur la valeur d'une fonction quelconque de ce paramètre.

Un changement d'échelle de températures fait varier la valeur numérique du paramètre t désignant un intervalle de température donné de la même façon que si ce paramètre représentait la valeur numérique d'une grandeur dont l'unité éprouverait une certaine variation. Il en résulte nécessairement un changement dans la valeur numérique des expressions qui renferment explicitement le paramètre t. Pour apprécier ce changement, on peut traiter la température comme une quatrième grandeur fondamentale indépendante par rapport à laquelle les diverses grandeurs qui en dépendent seraient regardées comme ayant des dimensions déterminées par leurs formules de définition (¹).

Relativement aux grandeurs spéciales $|\mathcal{G}|$, $|\mathcal{G}'|$, ..., dont les mesures figurent dans le premier membre des formules mises sous la forme

$$h.X^x \ldots F.\theta.U.\mathcal{G}^\gamma.\mathcal{G}'^{\gamma'} \ldots = K,$$

il y a deux cas à distinguer :

Ou bien les mesures de ces grandeurs ne supposent pas la connaissance préalable du paramètre K ;

Ou bien les mesures de certaines d'entre elles au moins la supposent.

Le premier cas est celui qui se rencontre dans toutes les formules de la physique, sauf celles qui concernent l'électricité et le magnétisme.

Le second cas, qui est celui des formules relatives aux phénomènes électriques et magnétiques, sera, plus loin, l'objet d'un examen spécial et détaillé.

Considérons tout d'abord le premier cas.

Art. 3. — *Influence du choix des unités sur la valeur des constantes physiques.*

Nous supposerons d'abord que les divers cas particuliers auxquels une formule donnée est destinée à s'appliquer cor-

(¹) Voir la note IV.

respondent à la même température. Dans ce cas le paramètre désignant cette température n'est pas explicitement introduit dans la formule dont le type est

$$h.X^x \ldots F.\mathcal{G}^\gamma.\mathcal{G}'^{\gamma'} \ldots = K.$$

Une telle formule exprime que, dans les divers cas particuliers où elle est applicable, l'expression

$$h X_i^x \ldots F_i.\mathcal{G}_i^\gamma.\mathcal{G}_i'^{\gamma'} \ldots$$

obtenue à l'aide des mesures des diverses grandeurs associées dans le phénomène étudié, conserve la valeur

$$h X_1^x \ldots F_1.\mathcal{G}_1^\gamma.\mathcal{G}_1'^{\gamma'} \ldots = K_1$$

qu'on lui a trouvée dans un premier cas. En d'autres termes la formule proposée équivaut à la suivante :

$$h.X_i^x \ldots F_i.\mathcal{G}_i^\gamma.\mathcal{G}'^{\gamma'}. = h X_1^x \ldots F_1.\mathcal{G}_1^\gamma.\mathcal{G}_1'^{\gamma'} \ldots$$

Si l'expression

$$X^x \ldots F.\mathcal{G}^\gamma.\mathcal{G}'^{\gamma'}$$

était de dimensions nulles par rapport aux diverses grandeurs qui y figurent, sa valeur serait indépendante de tout choix d'unités et K serait une constante numérique absolue.

Tel n'est pas le cas des formules du genre de celles qui nous occupent. Aussi la valeur obtenue pour K à l'aide des mesures prises dans un cas particulier dépend-elle des unités à l'aide desquelles ces mesures ont été faites.

Considérons, par exemple, la constante K de la formule

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K.$$

Avec un premier choix d'unités de vitesse et de longueur, on trouvera dans une expérience particulière

$$V = V_1,$$
$$L = L_1,$$

et par suite

$$K = \frac{V_1}{\sqrt{L_1}} = K_1.$$

Si l'on vient à changer d'unités et à en prendre qui soient, par exemple, respectivement v fois et l fois plus grandes que les premières, on trouvera, dans la même expérience particulière,

$$V = V_2 = \frac{V_1}{v},$$

$$L = L_2 = \frac{L_1}{l},$$

et par suite

$$K = \frac{V_2}{\sqrt{L_2}} = K_2 = \frac{\frac{V_1}{v}}{\sqrt{\frac{L_1}{l}}} = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} \frac{V_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} K_1.$$

La formule à employer avec le premier système d'unités étant

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K_1,$$

celle qu'on devra employer avec le second sera

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K_2 = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} K_1.$$

Les paramètres tels que K dépendent, toutes choses égales d'ailleurs, soit de la nature des corps auxquels est applicable la formule considérée, soit de la nature du milieu où se manifeste le phénomène.

Ainsi, dans les formules

$$pv = K,$$

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H,$$

les paramètres K, H doivent recevoir, toutes choses égales d'ailleurs,

des valeurs spéciales pour chaque corps, tandis que dans les formules

$$\frac{V}{\sqrt{2L}} = g,$$

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N,$$

les constantes g et N ont des valeurs indépendantes de la nature des corps considérés, mais caractéristiques du milieu.

On désigne dans tous les cas ces paramètres sous les noms de *paramètres spécifiques ou de constantes physiques.*

Si dans l'expression

$$X^x . F . \mathcal{G}^{\gamma} . \mathcal{G}'^{\gamma'} \ldots$$

on substitue aux diverses grandeurs géométriques et mécaniques les symboles exprimant leurs dimensions par rapport à trois grandeurs fondamentales, on obtiendra un monôme constituant le symbole des dimensions de K. Ce symbole montrera aisément l'influence que doit avoir sur la valeur numérique de K un changement des unités fondamentales.

Soit

$$X^x \, Y^y \, Z^z$$

le symbole des dimensions d'une constante physique K. Si l'on substitue aux unités

$$|\mathfrak{X}|, \; |\mathfrak{Y}|, \; |\mathfrak{Z}|$$

d'un premier système, dans lequel la constante avait la valeur K_1, des unités valant respectivement ξ fois, η fois, ζ fois les premières, la constante recevra, par suite de ce changement, la valeur

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z}.$$

Ainsi, la constante H de la formule

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H$$

a les dimensions du quotient $\frac{S}{F}$ ou

$$\frac{L^2}{F}.$$

Tout changement de l'unité de longueur et de l'unité de force changera donc la valeur de cette constante pour un corps donné. Si l'unité de longueur et l'unité de force deviennent respectivement l fois et f fois plus grandes, la valeur de la constante deviendra $\frac{l^2}{f}$ fois plus petite.

La constante N de la formule de Newton a les dimensions du quotient $\frac{FL^2}{M^2}$, qui sont exprimées par les symboles

$$\frac{L^4}{FT^4}$$

ou

$$\frac{L^3}{MT^2},$$

suivant qu'on prend (LTF) ou (LTM) comme grandeurs fondamentales. Si l'on passe d'un premier système à un second dans lequel les unités de longueur, de temps, de force et de masse valent respectivement l, t, f, m fois les premières, la nouvelle valeur de la constante se déduira de la première N_1 par les formules

$$N_2 = \frac{1}{\frac{l^4}{ft^4}} N_1,$$

$$N_2 = \frac{1}{\frac{l^3}{mt^2}} N_1.$$

D'une manière générale, on voit que pour effectuer correctement l'application numérique des formules représentant les lois physiques, il faut faire usage des mêmes unités dans l'évaluation des grandeurs géométriques et mécaniques dont elles offrent l'indication, et dans l'évaluation des constantes physiques qu'elles renferment, car c'est la convention même qui a été faite dans l'établissement des formules. Tout chan-

gement d'unités entraîne donc un changement dans les nombres représentant ces constantes, conformément à la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour passer de la valeur du paramètre représentant une constante dans un système d'unités, à la valeur correspondant à un autre système, il faut traiter ce paramètre comme la* MESURE *d'une grandeur dont les dimensions par rapport aux grandeurs géométriques et mécaniques figurant dans l'expression de la loi sont indiquées par le symbole obtenu en résolvant cette expression par rapport au paramètre en question.*

Si, à une certaine température, dans le phénomène représenté par une formule donnée, l'effet résultant des valeurs numériques X... $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$... données aux grandeurs déterminantes est une grandeur de valeur numérique F_{t_0}; à une autre température t, l'effet, toujours mesuré de la même façon, qui correspondra aux mêmes données, sera une grandeur de valeur numérique F_t différente de la première.

A cette seconde température, l'expression hX^x... F... G^γ. $G'^{\gamma'}$... aura donc une valeur K_t différente de la première K_{t_0}. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, l'influence de la température sur l'expression d'une loi se traduira par un changement de valeur de la constante. On donnera le moyen d'appliquer la formule à toutes les températures en faisant connaître K_{t_0} et la fonction de t exprimant le rapport $\frac{K_t}{K_{t_0}}$.

ART. 4.

Parmi les effets que peut produire sur la valeur de la constante d'une loi physique un changement d'unités fondamentales, deux méritent par leur simplicité et leur importance d'être examinés en particulier.

I

Le changement des unités fondamentales peut être fait

de telle façon que la constante soit représentée, dans le second système, par le même nombre que dans le premier.

Ainsi que le montre la formule

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z},$$

cela arrivera si les rapports ξ, η, ζ des nouvelles unités fondamentales aux anciennes satisfont à la relation

$$\xi^x . \eta^y . \zeta^z = 1.$$

En choisissant arbitrairement deux de ces rapports et déterminant le troisième à l'aide de cette relation même, on peut définir une infinité de changements jouissant de la propriété considérée.

On peut représenter géométriquement cette classe de changements en considérant les rapports ξ, η, ζ, comme les coordonnées des points d'une surface définie par l'équation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z = 1.$$

Ainsi tous les groupes de valeurs de *l*, *t*, *m* laissant à la constante N sa valeur, dans la formule de Newton, sont représentés par des coordonnées des points de la surface

$$\frac{\xi^3}{\xi \eta^2} = 1.$$

Si la constante K ne dépend que de deux grandeurs fondamentales, la représentation géométrique des changements en question se fera au moyen d'une ligne.

Remarque. — Si l'on a

$$x + y + z = 0,$$

la relation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z$$

sera satisfaite en particulier pour

$$\xi = \eta = \zeta.$$

Cette remarque s'applique à la constante N de la loi de Newton si l'on prend LTM comme grandeurs fondamentales. Alors, en effet, ses dimensions étant

$$\frac{L^3}{T^2M},$$

on a

$$x = 3, \qquad y = -2, \qquad z = -1$$

et

$$x + y + z = 0.$$

La constante N ne doit donc pas changer si l'on fait varier dans un même rapport l'unité de longueur, l'unité de temps et l'unité de masse.

II

Le changement des unités fondamentales peut être fait de telle façon que la nouvelle valeur de la constante soit le nombre 1.

La formule générale

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z}$$

montre que cela arrivera si les rapports ξ, η, ζ des nouvelles unités fondamentales aux anciennes satisfont à la relation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z = K_1.$$

Ces changements, généralement en nombre infini, peuvent, de la même façon que ceux de tout à l'heure, être représentés à l'aide d'une figure géométrique, surface ou ligne, suivant que les rapports seront au nombre de trois ou de deux seulement.

Exemples.

I

Le centimètre étant l'unité de longueur et la seconde l'unité de temps, quelle devrait être l'unité de masse pour que la constante de la formule de Newton eût la valeur 1 ?

Soient l, t, m les rapports des unités fondamentales du système proposé aux unités fondamentales du système CGS. On doit avoir

$$\frac{l^3}{t^2 m} = \text{N},$$

ou, puisque $l = 1$ et $t = 1$,

$$\frac{1}{m} = \text{N},$$

N étant la valeur de la constante de la formule de Newton dans le système CGS, savoir :

$$6{,}7.10^{-8}.$$

Par suite,

$$m = \frac{1}{6.7} \cdot 10^8.$$

L'unité de masse cherchée devrait être

$$\frac{1}{6.7} \cdot 10^8 \text{ gramme-masse.}$$

II

La seconde étant l'unité de temps et la vitesse de la lumière l'unité de vitesse, quelle devrait être l'unité de masse pour que la constante de la formule de Newton eût la valeur 1 ?

Les conditions énoncées s'expriment par les relations

$$t = 1,$$
$$l = 3.10^{10},$$
$$\frac{l^3}{t^2 m} = 6{,}7.10^{-8},$$

d'où

$$\frac{(3.10^{10})^3}{m} = 6{,}7.10^{-8}$$

et

$$m = \frac{27}{6{,}7} 10^{38}.$$

L'unité de masse devrait être

$$\frac{27}{6,7}\,10^{38} \text{ gramme masse.}$$

Art. 5. — *Formules renfermant plusieurs constantes physiques. Équations réduites.*

Soit

$$(1) \qquad F(X, Y, Z, \ldots, a, b, c\ldots) = 0$$

une formule établissant, d'après l'étude d'un certain phénomène sur une classe particulière de corps, une relation entre les mesures X, Y, Z... de diverses grandeurs |X|, |Y|, |Z|, ... et dans laquelle figurent, outre ces mesures, plusieurs paramètres *a, b, c*..., variables d'un corps à l'autre, et constituant des constantes physiques des corps en question.

Soient

$$X^{\alpha'}\ Y^{\alpha''}\ Z^{\alpha'''},$$
$$X^{\beta'}\ Y^{\beta''}\ Z^{\beta'''},$$
$$X^{\gamma'}\ Y^{\gamma''}\ Z^{\gamma'''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les symboles de dimensions des paramètres *a, b, c* par rapport aux grandeurs X, Y, Z.

Si aux unités $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{Y}|$, $|\mathfrak{Z}|$ à l'adoption desquelles ces paramètres doivent les valeurs *a, b, c*..., on substitue d'autres unités $\xi|\mathfrak{X}|$, $\eta|\mathfrak{Y}|$, $\zeta|\mathfrak{Z}|$ valant respectivement ξ fois, η fois, ζ fois les précédentes, les constantes physiques du corps considéré seront représentées par de nouveaux nombres :

$$A = \frac{a}{\xi^{\alpha'}\ \eta^{\alpha''}\ \zeta^{\alpha'''}},$$
$$B = \frac{b}{\xi^{\beta'}\ \eta^{\beta''}\ \zeta^{\beta'''}},$$
$$C = \frac{c}{\xi^{\gamma'}\ \eta^{\gamma''}\ \zeta^{\gamma'''}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Inversement, si les égalités précédentes sont telles qu'elles puissent être résolues par rapport à ξ, η, ζ, elles permettront, étant donné un système d'unités $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{Y}|$, $|\mathfrak{Z}|$, d'en définir un autre $\xi|\mathfrak{X}|$, $\eta|\mathfrak{Y}|$, $\zeta|\mathfrak{Z}|$ donnant aux constantes physiques du corps considéré telles valeurs A, B, C qu'on voudra.

Pour chacun des corps auxquels s'applique la formule (1) on pourra ainsi faire un choix d'unités tel que la formule renferme un seul et même système de valeurs : A, B, C des paramètres associés aux mesures des grandeurs $|X|$, $|Y|$, $|Z|$. Une seule et même formule pourra ainsi, mais en exigeant pour chaque corps un choix convenable d'unités, représenter pour toute une classe de corps l'étude du phénomène en question.

D'après une ingénieuse remarque de M. Curie (¹), l'équation réduite de Van der Walls peut être considérée comme résultant de l'application de cette méthode générale.

La formule proposée par Van der Waals pour représenter les transformations d'un fluide quelconque est :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\theta.$$

Elle renferme, outre les mesures p, v, θ, de la pression, du volume et de la température du fluide, trois constantes physiques : a, b, R, caractéristiques du fluide et ayant respectivement pour symboles de dimensions relativement aux grandeurs P, V, Θ :

$$\text{dim. } a = PV^2,$$
$$\text{dim. } b = V,$$
$$\text{dim. } R = \frac{PV}{\Theta}.$$

Si donc aux unités de pression, de volume et de température primitivement employées on en substitue d'autres valant respectivement p_i fois, v_i fois, θ_i fois les précédentes, les

(¹) *Quelques remarques relatives à l'équation réduite de Van der Waals.* (*Archives des Sciences phys. et nat.*, 3ᵉ pér., t. XXVI, p. 13.)

constantes physiques du fluide considéré prendront les valeurs :

$$\mathcal{A}_i = \frac{a}{p_i v_i},$$
$$\mathcal{B}_i = \frac{b}{v_i},$$
$$\mathcal{R}_i = \frac{R}{\frac{p_i v_i}{\theta_i}}.$$

Pour nouvelles unités on peut prendre, si l'on veut, la pression, le volume et la température correspondant à un état quelconque du fluide.

Parmi tous les changements d'unités qu'on peut ainsi faire, il en est un qui donne pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ des valeurs indépendantes de la nature du fluide considéré, c'est celui qui consiste à prendre pour termes de comparaison des pressions, des volumes et de la température, la pression, le volume et la température du fluide au point critique.

En effet, on a dans ce cas

$$p_i = p_c,$$
$$v_i = v_c,$$
$$\theta_i = \theta_c,$$

et

$$\mathcal{A}_c = \frac{a}{p_c v_c},$$
$$\mathcal{B}_c = \frac{b}{v_c},$$
$$\mathcal{R}_c = \frac{R}{\frac{p_c v_c}{\theta_c}}.$$

Or, d'après la formule de Van der Waals, les valeurs numériques p_c, v_c, θ_c, de la pression, du volume et de la température critiques satisfont aux relations

$$\frac{a}{p_c v_c^2} = 3,$$

$$\frac{b}{v_c} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{R}{\frac{p_c v_c}{\theta_c}} = \frac{8}{3}.$$

On a donc, en prenant la pression, le volume et la température critiques δ pour unités, et quel que soit le fluide considéré :

$$\mathcal{A}_c = 3,$$
$$\mathcal{B}_c = \frac{1}{3},$$
$$\mathcal{R}_c = \frac{8}{3}.$$

A cette condition la formule

$$\left(p + \frac{3}{v^2}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta$$

convient à tous les fluides.

C'est l'équation ***réduite*** de Van der Waals.

On peut former une infinité d'équations réduites de ce genre, puisqu'on peut donner aux constantes a, b, R de la formule générale

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\theta$$

telles valeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$, qu'on voudra. Il suffit pour cela de prendre comme unités la pression, le volume et la température dont les valeurs numériques p_i, v_i, θ_i par rapport aux anciennes unités satisfont aux relations :

$$\frac{a}{p_i v_i^2} = \mathcal{A},$$
$$\frac{b}{v_i} = \mathcal{B},$$
$$\frac{R}{\frac{p_i v_i}{\theta_i}} = \mathcal{R}.$$

Mais la pression p_i, le volume v_i et la température θ_i ne correspondront pas nécessairement à un état du fluide. Il n'en sera

ainsi que dans le cas où les valeurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}$ assignées aux constantes de l'équation réduite satisferont à la relation

$$(1 + \mathfrak{A})(1 - \mathfrak{B}) = \mathfrak{R}.$$

L'équation réduite de Van der Waals est un cas particulier des équations de cette seconde catégorie pour lesquelles les unités sont empruntées à un état du corps.

Art. 6.

Ici se pose encore une question dont celle de la similitude des systèmes géométriques et mécaniques n'est qu'un cas particulier :

Lorsqu'un groupe de nombres représente, dans un premier système d'unités, des grandeurs associées entre elles suivant la loi d'un certain phénomène, à quelle condition les grandeurs de même espèce qui, dans un autre système d'unités, auraient les mêmes valeurs numériques que les premières, sont-elles susceptibles aussi de se trouver associées dans un phénomène de nature identique?

Soient $|X|$, $|Y|$, ..., des grandeurs associées dans un certain phénomène. Dans un système où les unités sont respectivement

$$|\mathfrak{X}| . |\mathfrak{Y}| \ldots,$$

les valeurs numériques de ces grandeurs sont

$$\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|} = X, \quad \frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|} = Y \ldots$$

et satisfont à une certaine relation

$$X^x . Y^y \ldots = K$$

caractéristique du phénomène en question.

Considérons un nouveau système d'unités

$$\xi|\mathfrak{X}|, \quad \eta|\mathfrak{Y}| \ldots$$

Les grandeurs de la nature des premières et ayant dans ce système les valeurs numériques

$$X . Y \ldots$$

seraient

$$X.\xi|\mathfrak{X}|, \quad Y.\eta|\mathfrak{Y}|\dots$$

Pour que ces grandeurs soient susceptibles de se trouver associées dans un phénomène de l'ordre considéré, il faut que leurs valeurs numériques, prises dans le premier système, satisfassent à la relation qui, dans ce système, représente la loi du phénomène. Or, ces valeurs numériques sont

$$X\xi, \quad Y\eta\dots$$

On devrait donc avoir

$$(X\xi)^x (Y\eta)^y \dots = K,$$

ou, en tenant compte de la relation $X^x . Y^y \dots = K$,

$$\xi^x \eta^y \dots = 1.$$

Ainsi les changements d'unités satisfaisant à la condition qui vient d'être examinée sont les changements qui laissent intactes les constantes des formules.

Cette particularité qui ne se présente que pour une certaine catégorie de changements d'unités fondamentales quand il s'agit de questions où interviennent des formules renfermant des constantes physiques, a lieu pour tous les changements possibles quand il s'agit de questions de géométrie ou de mécanique, car dans les formules de ces deux dernières sciences, telles que les fournit un système coordonné de mesures absolues, les constantes, ainsi que nous l'avons vu, sont absolument indépendantes du choix des unités fondamentales.

Ainsi, dans tous les systèmes géométriques absolus possibles, un triangle dont la base et la hauteur auront pour valeurs numériques 5 et 6 aura une surface représentée par 15; dans tous les systèmes mécaniques absolus possibles, une accélération 5 communiquée à une masse 3 sera l'effet d'une force 15. Mais supposons qu'on trouve, en étudiant l'étirement d'un métal et effectuant les mesures dans le système (CGS), qu'un allongement 1 éprouvé par une tige de longueur 20 et de section 1 soit l'effet d'une force 10^{10}. Considérons tous les systèmes absolus définis par les unités fondamentales

$$l\,\text{cm}, \qquad \text{seconde}, \qquad f\,\text{dynes},$$

l et f satisfaisant à la relation

$$\frac{l^2}{f} = 1.$$

Dans ces systèmes, mais dans ceux-là seulement, un allongement représenté par 1 éprouvé par une tige de longueur 20 et de section 1 sera aussi l'effet d'une force 10^{10}. Dans tous les autres systèmes, aux données 20, 1, 10^{10} correspondront des effets représentés par des nombres différents de 1.

CHAPITRE II

Principales grandeurs électriques et magnétiques. Propositions relatives à leur comparaison.

ART. 1.

Les formules fondamentales relatives aux phénomènes électriques et magnétiques sont :

1° La formule de Coulomb

$$F = k\,\frac{QQ'}{L^2},$$

qui exprime l'action mutuelle F de deux petits corps électrisés séparés par une distance L; Q et Q′ étant des paramètres caractéristiques de l'état électrique de ces corps et représentant ce qu'on est convenu d'appeler leurs *charges électriques* ou *quantités d'électricité*, k étant d'autre part un paramètre caractéristique du milieu.

On remarquera que Q et Q′ jouent, dans la formule de Coulomb, le même rôle que M et M′ dans la formule de Newton.

2° La formule

$$F = k'\,\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

du même type que la précédente, également due à Coulomb, et qui représente l'action mutuelle de deux ***masses magnétiques*** $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, séparées par une distance L, k' étant un coefficient caractéristique du milieu.

3° La formule

$$I = j\frac{Q}{T},$$

exprimant que ce qu'on est convenu d'appeler l'***intensité d'un courant*** est une grandeur proportionnelle au débit d'électricité dont un conducteur peut, d'une façon symbolique, être regardé comme le siège, ou, en d'autres termes, que cette intensité est une grandeur directement proportionnelle à la quantité d'électricité mise en jeu et inversement proportionnelle au temps correspondant.

4° La formule de Biot et Savart

$$dF = \frac{hI\mathcal{M}ds\sin\theta}{l^2},$$

qui exprime l'action exercée par un élément de courant ds d'intensité I, sur un pôle magnétique m, situé à une distance l du milieu de l'élément, θ étant l'angle que fait la droite l avec ds.

5° La formule d'Ampère, qu'on peut écrire :

$$d^2F = aII'\frac{ds\,ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

et qui exprime l'action mutuelle de deux éléments de courants (I, ds), (I', ds'), séparés par une distance l, faisant entre eux un angle ω et avec la droite l des angles θ, θ'.

En écrivant ces formules de la façon suivante :

$$\frac{F}{\frac{QQ'}{L^2}} = k,$$

$$\frac{F}{\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2}} = k',$$

$$\frac{\mathrm{I}}{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}} = j,$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d\mathrm{F}}{\frac{\mathcal{M}\mathrm{I}\,ds}{l^2}} = h,$$

$$\frac{1}{2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'} \frac{d^2\mathrm{F}}{\mathrm{II}'\frac{ds\,ds'}{l^2}} = a,$$

on voit qu'elles se rapportent toutes au type général que nous avons considéré dans le chapitre précédent.

Art. 2.

Outre des grandeurs géométriques et mécaniques, les formules précédentes renferment des grandeurs particulières spécialement affectées à l'étude des phénomènes électriques et magnétiques. Ces grandeurs particulières, au nombre de trois, sont :

la *quantité d'électricité* Q;
la *masse magnétique* $\mathcal{M}$;
l'*intensité de courant* I.

Un grand nombre d'autres grandeurs spéciales sont en outre envisagées dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques; mais toutes sont définies au moyen des précédentes et de diverses grandeurs géométriques ou mécaniques. Passons, en effet, en revue les principales d'entre elles.

I

Électrostatique.

1. Densités électriques.

Dans la théorie des phénomènes électrostatiques on est conduit à imaginer des distributions continues de masses électriques dans des espaces linéaires, superficiels ou solides.

La distribution électrique dans un espace est dite *uniforme* lorsque les masses électriques attribuées à des parties égales prises n'importe où dans cet espace sont égales.

On nomme rapport des *densités électriques* de deux espaces à distribution uniforme le rapport des masses attribuées à des parties égales de ces espaces.

Soient $|Q|$ et $|\mathcal{Q}|$ les quantités d'électricité attribuées respectivement à des parties $|N|$ et $|\mathcal{N}|$ de deux espaces électrisés uniformément. Le rapport des densités électriques de ces espaces est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|D_e|}{|\mathcal{D}_e|} = \frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\cdot\frac{|\mathcal{N}|}{|N|} = \left(\frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\right)\left(\frac{|N|}{|\mathcal{N}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux densités électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux quantités d'électricité et à la comparaison de deux portions d'espace.

Le calcul du rapport $\frac{D_e}{\mathcal{D}_e}$, qui sera la valeur numérique de $|D_e|$ si $|\mathcal{D}_e|$ est l'unité de densité choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|Q|$, $|N|$, $|\mathcal{Q}|$, $|\mathcal{N}|$, suivant la formule

$$\frac{|D_e|}{|\mathcal{D}_e|} = \frac{Q}{\mathcal{Q}}\cdot\frac{\mathcal{N}}{N} = \frac{Q\,N^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{N}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'une densité électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de densité électrique la densité d'un espace électrisé uniformément dans lequel on aurait $\mathcal{Q}=1$ pour $\mathcal{N}=1$.

Pour désigner cette densité particulière, nous l'appellerons *unité normale de densité électrique.*

Dans le cas d'une distribution non uniforme, on nomme *densité en un point* la densité moyenne d'un espace infiniment petit comprenant ce point.

Lorsque l'unité de densité est l'unité normale, la valeur numérique d'une densité électrique est égale au quotient de la valeur numérique d'une masse électrique par la valeur numérique de la portion d'espace qu'elle occupe, ainsi que l'indique

la formule suivante à laquelle se réduit alors la formule générale :

$$D_e = \frac{Q}{N}.$$

2. Champs électriques.

On nomme *champ électrique* tout espace dans lequel se manifestent des actions électriques.

On appelle rapport des *intensités* de deux champs électriques en des points P et $\mathfrak{P}$ appartenant respectivement à chacun d'eux le rapport des forces qui solliciteraient en ces points des masses électriques égales.

Soit $|F|$ l'action qu'éprouverait une masse électrique $|Q|$ en un point P d'un champ électrique. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{F}|$ l'action qu'éprouverait en un point $\mathfrak{P}$ d'un autre champ une masse électrique $|\mathfrak{Q}|$. Le rapport des intensités de ces champs en ces points est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\frac{|\mathfrak{Q}|}{|Q|} = \left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison des intensités de deux champs électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux quantités d'électricité.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|}$, qui sera la valeur numérique de $|H_e|$ si $|\mathcal{H}_e|$ est l'unité de champ électrique choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|F|$, $|Q|$, $|\mathfrak{F}|$, $|\mathfrak{Q}|$ suivant la formule

$$\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} = \frac{F}{\mathfrak{F}}\cdot\frac{\mathfrak{Q}}{Q} = \frac{F Q^{-1}}{\mathfrak{F}\mathfrak{Q}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner au calcul de la valeur numérique de l'intensité d'un champ électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité d'intensité celle d'un champ en un point pour lequel on aurait $\mathfrak{F} = 1$ pour $\mathfrak{Q} = 1$, c'est-à-dire

l'*unité normale d'intensité.* La mesure de l'intensité d'un champ en un point est, dans ce cas, égale au quotient de la valeur numérique de l'action éprouvée par une masse électrique placée en ce point par la valeur numérique de cette masse et, en particulier, égale à la valeur numérique de l'action éprouvée par l'unité de quantité d'électricité supposée placée en ce point, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$H_e = \frac{F}{Q}.$$

3. Flux de forces électriques.

Soit $|H_e|$ la composante d'un champ électrique uniforme suivant la normale à une surface plane $|S|$. Soit, de même $|\mathcal{H}_e|$, la composante d'un champ électrique uniforme suivant la normale à une surface plane $|\mathcal{S}|$. On dit que ces surfaces sont traversées par des flux de forces $|F_f|$, $|\mathcal{F}_f|$, dont le rapport est défini comme égal au produit du rapport des composantes normales des champs par le rapport des surfaces

$$\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|} = \frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} \cdot \frac{|S|}{|\mathcal{S}|}.$$

La comparaison de deux flux de force est donc, par définition, subordonnée à la comparaison de deux champs électriques et à la comparaison de deux surfaces.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|}$ qui sera la valeur numérique de $|F_f|$ si $|\mathcal{F}_f|$ est l'unité de flux de force choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|H_e|$, $|\mathcal{H}_e|$, $|S|$, $|\mathcal{S}|$ suivant la formule

$$\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|} = \frac{H_e}{\mathcal{H}_e} \cdot \frac{S}{\mathcal{S}} = \frac{H_e S}{\mathcal{H}_e \mathcal{S}}.$$

Soit $|H_e|$ la composante d'un champ électrique quelconque en un point suivant la normale à un élément de surface $|dS|$ passant par ce point. La valeur numérique du rapport du flux

électrique $d|F_f|$ traversant cet élément de surface au flux $|\mathfrak{F}_f|$, défini tout à l'heure, sera donnée par la formule

$$\frac{d\,|F_f|}{|\mathfrak{F}_f|} = \frac{H_e\,dS}{\mathcal{H}_e\,\mathfrak{S}}.$$

Si l'on veut donner au calcul de la valeur numérique d'un flux de force le maximum de simplicité, il faut prendre comme unité le flux qui traverserait l'unité de surface dans un champ dont la composante normale aurait une intensité égale à l'unité. Dans ce cas, la valeur numérique d'un flux de force est égale au produit des valeurs numériques de la composante normale du champ et de la surface considérée, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit alors la formule générale :

$$d\,|F_f| = H_e\,dS.$$

4. Potentiels électriques.

Soit, d'une part, $|W|$ le travail qui serait nécessaire pour amener une masse électrique $|Q|$ de l'infini en un point P d'un champ électrique ; soit, d'autre part, $|\mathfrak{W}|$ le travail qu'exigerait de même le transport d'une masse $|\mathfrak{Q}|$ en un point $\mathfrak{P}$ d'un autre champ.

Le rapport des *potentiels* $|V|$ et $|\mathfrak{V}|$ de ces deux champs aux points considérés est

$$\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\,\frac{|\mathfrak{Q}|}{|Q|} = \left(\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux potentiels électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux travaux et à la comparaison de deux quantités d'électricité.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}$, qui sera la valeur numérique de $|V|$ si $|\mathfrak{V}|$ est l'unité de potentiel choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|W|$, $|Q|$, $|\mathfrak{W}|$, $|\mathfrak{Q}|$, suivant la formule

$$\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \frac{W}{\mathfrak{W}}\,\frac{\mathfrak{Q}}{Q} = \frac{W\,Q^{-1}}{\mathfrak{W}\,\mathfrak{Q}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'un potentiel électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de potentiel le potentiel d'un champ en un point où l'on aurait $\mathcal{W} = 1$ pour $\mathcal{Q} = 1$. Ce potentiel serait l'*unité normale de potentiel.*

La mesure du potentiel d'un champ en un point est alors égale au quotient de la valeur numérique du travail nécessaire pour amener de l'infini en ce point une masse électrique par la valeur numérique de cette masse, et en particulier égale à la mesure du travail nécessaire pour transporter de l'infini en ce point une quantité d'électricité égale à l'unité, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$V = \frac{W}{Q}.$$

5. Capacités électriques.

Concevons un conducteur électrisé situé dans un milieu isolant, à une distance infiniment grande de tout autre conducteur, de façon que son potentiel ne dépende que de sa charge. Si cette charge varie dans un certain rapport, le potentiel varie dans le même rapport. En d'autres termes, entre la valeur numérique Q de la charge de ce conducteur et la valeur numérique V de son potentiel existe la relation

$$\frac{Q}{V} = \text{const} = C.$$

Soit un conducteur A électrisé situé dans un milieu isolant et soumis à l'influence d'autres conducteurs A′, A″.... Si ces conducteurs sont maintenus à un potentiel nul, le potentiel de A est encore proportionnel à sa charge.

Dans ce cas, la charge correspondant à un potentiel donné est plus grande que si les conducteurs A′, A″... n'existaient pas.

Pour un même système de conducteurs elle dépend de la nature du milieu isolant qui les sépare.

On donne au système de conducteurs A, A′, A″ le nom de *condensateur*.

Soient $|Q|$ et $|\mathcal{Q}|$ les charges de deux conducteurs placés dans des conditions où s'appliquent les observations précédentes, et soient $|V|$ et $|\mathcal{V}|$ leurs potentiels respectifs. Le rapport des *capacités électriques* de ces conducteurs, c'est-à-dire le rapport des charges correspondant à un même potentiel sera

$$\frac{|C|}{|\mathcal{C}|} = \frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\,\frac{|V|}{|\mathcal{V}|} = \left(\frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\right)\left(\frac{|V|}{|\mathcal{V}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux capacités électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux quantités d'électricité et à la comparaison de deux potentiels.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|C|}{|\mathcal{C}|}$, qui sera la valeur numérique de $|C|$ si $|\mathcal{C}|$ est l'unité de capacité choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|Q|$, $|V|$, $|\mathcal{Q}|$, $|\mathcal{V}|$ suivant la formule

$$\frac{|C|}{|\mathcal{C}|} = \frac{Q}{\mathcal{Q}}\cdot\frac{\mathcal{V}}{V} = \frac{QV^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{V}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de capacité celle d'un conducteur pour lequel une charge $\mathcal{Q} = 1$ correspondrait à un potentiel $\mathcal{V} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de capacité*. La mesure de la capacité d'un conducteur est alors égale au quotient de la valeur numérique de sa charge par la valeur numérique de son potentiel, ou, en particulier, égale à la mesure de la charge nécessaire pour le porter au potentiel unité, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Remarquons qu'en vertu de la relation

$$\frac{|V|}{|\mathcal{V}|} = \frac{|W|}{|\mathcal{W}|}\,\frac{|\mathcal{Q}|}{|Q|},$$

on a

$$\frac{|C|}{|\mathcal{C}|}=\left(\frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\right)^2\frac{|\mathcal{W}|}{|V|}.$$

Donc *la comparaison de deux capacités peut aussi être considérée comme se ramenant à des comparaisons de travaux de forces et à des comparaisons de quantités d'électricité.*

II

Magnétisme.

Dans la théorie élémentaire du magnétisme on considère des *densités magnétiques*, des *intensités de champs magnétiques*, des *flux de forces magnétiques*, des *potentiels magnétiques*, dont les définitions sont fondées sur la considération de la masse magnétique exactement comme celles des grandeurs électriques de mêmes noms sont fondées sur la considération de la quantité d'électricité. Les formules relatives à la comparaison de ces grandeurs magnétiques peuvent se déduire des formules électriques correspondantes, par la substitution pure et simple du symbole $\mathcal{M}$ au symbole $\mathcal{Q}$.

Outre ces grandeurs, on en envisage encore un certain nombre d'autres parmi lesquelles nous nous bornerons à signaler les moments magnétiques et les puissances de feuillets magnétiques.

1. Moments magnétiques.

On appelle *moment magnétique* d'un aimant une grandeur proportionnelle à la somme des masses magnétiques de même signe qu'il est censé contenir et à la distance des pôles.

Soient, pour un premier aimant, $|\mathcal{M}|$ la somme des masses magnétiques de même signe et $|L|$ la distance des pôles; soient, d'autre part, $|\mathfrak{M}|$ et $|\mathfrak{L}|$ les grandeurs analogues relatives à un second aimant. Le rapport des moments

magnétiques de ces deux aimants est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|\mathfrak{M}_0|}{|\mathcal{M}_0|} = \frac{|\mathfrak{M}|}{|\mathcal{M}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathcal{L}|}.$$

La comparaison de deux moments magnétiques est donc, par définition, subordonnée à la comparaison de deux masses magnétiques et à la comparaison de deux longueurs.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|\mathfrak{M}_0|}{|\mathcal{M}_0|}$, qui sera la valeur numérique du moment magnétique $|\mathfrak{M}_0|$ si $|\mathcal{M}_0|$ est l'unité de moment choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|\mathfrak{M}|$, $|L|$, $|\mathcal{M}|$, $|\mathcal{L}|$ suivant la formule

$$\frac{|\mathfrak{M}_0|}{|\mathcal{M}_0|} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{M}} \cdot \frac{L}{\mathcal{L}} = \frac{\mathfrak{M} L}{\mathcal{M}\mathcal{L}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'un moment magnétique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de moment le moment d'un aimant pour lequel on aurait $\mathcal{M} = 1$ et $\mathcal{L} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de moment magnétique*. La mesure d'un moment magnétique est alors égale au produit de la valeur numérique de la somme des masses magnétiques de même signe constituant l'aimant par la valeur numérique de la distance des pôles, ce que représente la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} L.$$

2. Feuillets magnétiques.

On nomme *feuillet magnétique* l'ensemble de deux surfaces voisines équidistantes possédant des couches magnétiques égales et de signes contraires. — La distance de ces surfaces se nomme l'épaisseur du feuillet.

On désigne sous le nom de *puissance magnétique d'un*

feuillet une grandeur proportionnelle à la fois à la densité superficielle des couches magnétiques qui le constituent et à leur distance.

Soit $|\sigma|$ la densité magnétique sur les faces d'un feuillet d'épaisseur $|L|$. Soit, de même, $|\varsigma|$ la densité magnétique sur les faces d'un autre feuillet d'épaisseur $|\mathfrak{L}|$. Le rapport des puissances magnétiques $|P_m|$, $|\mathfrak{L}_m|$ de ces deux feuillets est, par définition,

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{L}_m|} = \frac{|\sigma|}{|\varsigma|}\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La comparaison des puissances magnétiques de deux feuillets est donc subordonnée à la comparaison de deux densités magnétiques superficielles et à la comparaison de deux longueurs, ou, puisque $\frac{|\sigma|}{|\varsigma|} = \frac{|\mathfrak{M}|}{|\mathfrak{N}|}\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{|L|}\right)^2$, *à des comparaisons de masses magnétiques et à des comparaisons de longueurs.*

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|P_m|}{|\mathfrak{L}_m|}$, qui sera la valeur numérique de $|P_m|$ si $|\mathfrak{L}_m|$ est l'unité de puissance magnétique choisie, se fera à l'aide des valeurs numériques de $|\sigma|$, $|L|$, $|\varsigma|$, $|\mathfrak{L}|$, suivant la formule

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{L}_m|} = \frac{\sigma}{\varsigma}\cdot\frac{L}{\mathfrak{L}} = \frac{\sigma L}{\varsigma\mathfrak{L}}.$$

Pour donner à ce calcul le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de puissance magnétique celle d'un feuillet pour lequel on aurait $\varsigma = 1$ et $\mathfrak{L} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de puissance magnétique*. La valeur numérique de la puissance magnétique d'un feuillet est alors égale au produit de la valeur numérique de la densité superficielle par la valeur numérique de l'épaisseur, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$|P_m| = \sigma . L.$$

III

ÉLECTROCINÉTIQUE.

1. Conductibilités.

Si l'on établit entre les deux extrémités d'un conducteur homogène une différence de potentiel, ce conducteur devient le siège d'un courant électrique.

Ce conducteur est dit avoir une *conductibilité électrique* d'autant plus grande qu'on y développe un courant plus intense avec une moindre différence de potentiel.

Soient $|I|$ et $|\mathfrak{I}|$ les intensités des courants développés dans deux conducteurs homogènes par des différences de potentiel $|V| - |V'|$, $|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|$. Le rapport des conductibilités de ces deux conducteurs est, par définition,

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{|I|}{|\mathfrak{I}|} \cdot \frac{|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|}{|V| - |V'|} = \left(\frac{|I|}{|\mathfrak{I}|}\right)\left(\frac{|V| - |V'|}{|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|}\right)^{-1},$$

ou, si l'on appelle forces électromotrices et si l'on désigne par $|E|$ et $|\mathcal{E}|$ les différences de potentiel en question,

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{|I|}{|\mathfrak{I}|}\frac{|\mathcal{E}|}{|E|} = \left(\frac{|I|}{|\mathfrak{I}|}\right)\left(\frac{|E|}{|\mathcal{E}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux conductibilités est donc subordonnée à la comparaison de deux intensités de courant et à la comparaison de deux différences de potentiel ou forces électromotrices.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|}$, qui sera la valeur numérique de $|C_0|$ si $|\mathfrak{C}_0|$ est l'unité de conductibilité adoptée, se fera au moyen des valeurs numériques de $|I|$, $|E|$, $|\mathfrak{I}|$, $|\mathcal{E}|$, suivant la formule

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{I}{\mathfrak{I}} \cdot \frac{\mathcal{E}}{E} = \frac{I.E^{-1}}{\mathfrak{I}.\mathcal{E}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'une

conductibilité le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de conductibilité celle d'un conducteur pour lequel on aurait $\mathfrak{I} = 1$ pour $\mathcal{E} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de conductibilité.*

La mesure d'une conductibilité est alors égale au quotient de la valeur numérique de l'intensité du courant existant dans le conducteur par la valeur numérique de la force électromotrice, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$C_0 = \frac{I}{E}.$$

2. Résistances.

La *résistance* d'un conducteur est une grandeur définie comme l'inverse de sa conductibilité.

Le rapport des résistances de deux conducteurs est donc en raison directe des forces électromotrices et en raison inverse des intensités correspondantes, en sorte que l'on a

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{|E|}{|\mathcal{E}|}\,\frac{|\mathfrak{I}|}{|I|} = \left(\frac{|E|}{|\mathcal{E}|}\right)\left(\frac{|I|}{|\mathfrak{I}|}\right)^{-1}$$

ou, puisque $\frac{|E|}{|\mathcal{E}|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}$,

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \left(\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}\left(\frac{|I|}{|\mathfrak{I}|}\right)^{-1}.$$

La valeur numérique du rapport $\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|}$, qui sera la mesure de $|R|$ si $|\mathfrak{R}|$ est l'unité de résistance choisie, s'obtiendra à l'aide des valeurs numériques de $|E|$, $|I|$, $|\mathcal{E}|$, $|\mathfrak{I}|$ suivant la formule

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{E}{\mathcal{E}}\cdot\frac{\mathfrak{I}}{I} = \frac{EI^{-1}}{\mathcal{E}\mathfrak{I}^{-1}}.$$

Pour donner à ce calcul de la valeur numérique d'une résis-

tance le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de résistance la résistance d'un conducteur pour lequel on aurait $\mathcal{I} = 1$ pour $\mathcal{E} = 1$, c'est-à-dire la résistance d'un conducteur dont la conductibilité serait égale à l'unité normale de conductibilité. La valeur numérique d'une résistance est alors égale au quotient de la valeur numérique de la force électromotrice par la valeur numérique de l'intensité du courant correspondant, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$R = \frac{E}{I}.$$

3. Résistances spécifiques.

Entre les valeurs numériques de la résistance $|R|$ d'un fil conducteur homogène à section uniforme, de sa longueur $|L|$ et de sa section $|S|$, existe la relation

$$\frac{R}{\frac{L}{S}} = \text{const} = \rho.$$

Le paramètre ρ, qui dépend de la nature de la substance constituant le conducteur, se nomme la ***résistance spécifique*** de cette substance.

Soient $|R|$ et $|\mathfrak{R}|$ les résistances de deux conducteurs de natures différentes, de longueurs et de sections respectivement égales à $|L|$, $|S|$ d'une part, $|\mathfrak{L}|$, $|\mathfrak{S}|$ d'autre part. Le rapport des résistances spécifiques des substances constituant ces conducteurs est par définition

$$\frac{|\rho|}{|P|} = \frac{|R|}{|\mathfrak{R}|}\,\frac{|\mathfrak{L}|}{|L|}\,\frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}.$$

La comparaison de deux résistances spécifiques est subordonnée à la comparaison de deux résistances, à la compa-

raison de deux longueurs et à la comparaison de deux surfaces.

La valeur numérique du rapport $\frac{\rho}{P}$, qui sera la mesure de $|\rho|$ si $|P|$ est l'unité de résistance spécifique choisie, s'obtiendra à l'aide des valeurs numériques de $|R|$, $|L|$, $|S|$, $|\mathfrak{R}|$, $|\mathfrak{L}|$, $|\mathfrak{S}|$, suivant la formule

$$\frac{|\rho|}{|P|}=\frac{R}{\mathfrak{R}}\frac{\mathfrak{L}}{L}\frac{S}{\mathfrak{S}}=\frac{R\,L^{-1}S}{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{S}}.$$

Pour donner à ce calcul de la valeur numérique d'une résistance spécifique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité la résistance spécifique d'une substance pour laquelle on aurait $\mathfrak{R}=1$ pour $\mathfrak{L}=1$ et $\mathfrak{S}=1$, c'est-à-dire l'unité normale de résistance spécifique. La valeur numérique de la résistance spécifique d'un conducteur est alors égale au produit de la valeur numérique de sa résistance par la valeur numérique de sa section et par l'inverse de la valeur numérique de sa longueur, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$\rho=\frac{RS}{L}.$$

Art. 3.

En résumé, les grandeurs électriques et magnétiques peuvent être divisées en deux classes : *grandeurs fondamentales* et *grandeurs dérivées.*

La comparaison des grandeurs dérivées de même espèce est subordonnée, en vertu de la définition même de ces grandeurs, à des comparaisons de grandeurs fondamentales et à des comparaisons de grandeurs géométriques ou mécaniques, de la façon indiquée par le tableau suivant :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS		COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS
Densités électriques	linéaires.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QL^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{L}^{-1}}$
	superficielles.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert \mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QS^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{S}^{-1}}$
	solides.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert \mathcal{V}_0\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QV_0^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{V}_0^{-1}}$
Champs électriques.		$\left(\frac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathcal{F}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{FQ^{-1}}{\mathcal{F}\mathcal{Q}^{-1}}$
Flux de force.		$\left(\frac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathcal{F}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert \mathcal{S}\rvert}\right)$	$\frac{FQ^{-1}S}{\mathcal{F}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{S}}$
Potentiels électriques.		$\left(\frac{\lvert W\rvert}{\lvert \mathcal{W}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}}{\mathcal{W}\mathcal{Q}^{-1}}$
Capacités.		$\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert \mathcal{Q}\rvert}\left(\frac{\lvert V\rvert}{\lvert \mathcal{V}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QV^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{V}^{-1}}$

II

Magnétisme.

NATURE des GRANDEURS		COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS
Densités magnétiques	linéaires.	$\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathcal{M}L^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{L}^{-1}}$
	superficielles.	$\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert \mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathcal{M}S^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{S}^{-1}}$
	solides.	$\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert \mathcal{V}_0\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathcal{M}V_0^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{V}_0^{-1}}$
Puissances de feuillets.		$\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert \mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathcal{L}\rvert}$	$\frac{\mathcal{M}.S^{-1}L}{\mathfrak{M}.\mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}}$
Champs magnétiques.		$\frac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathcal{F}\rvert}\left(\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{F\mathcal{M}^{-1}}{\mathcal{F}\mathfrak{M}^{-1}}$
Potentiels magnétiques.		$\frac{\lvert W\rvert}{\lvert \mathcal{W}\rvert}\left(\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{W.\mathcal{M}^{-1}}{\mathcal{W}\mathfrak{M}^{-1}}$
Moments magnétiques.		$\frac{\lvert \mathcal{M}\rvert}{\lvert \mathfrak{M}\rvert}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathcal{L}\rvert}$	$\frac{\mathcal{M}L}{\mathfrak{M}\mathcal{L}}$

III

Électrocinétique.

Forces électromotrices.	$\frac{\lvert W \rvert}{\lvert \mathfrak{W} \rvert}\left(\frac{\lvert Q \rvert}{\lvert \mathfrak{Q} \rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}}{\mathfrak{W}\mathfrak{Q}^{-1}}$
Conductibilités.	$\left(\frac{\lvert E \rvert}{\lvert \mathcal{E} \rvert}\right)^{-1}\frac{\lvert I \rvert}{\lvert \mathfrak{I} \rvert}$	$\frac{W^{-1}QI}{\mathfrak{W}^{-1}\mathfrak{Q}\mathfrak{I}}$
Résistances.	$\frac{\lvert E \rvert}{\lvert \mathcal{E} \rvert}\left(\frac{\lvert I \rvert}{\lvert \mathfrak{I} \rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}I^{-1}}{\mathfrak{W}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{I}^{-1}}$
Résistances spécifiques.	$\frac{\lvert E \rvert}{\lvert \mathcal{E} \rvert}\left(\frac{\lvert I \rvert}{\lvert \mathfrak{I} \rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert L \rvert}{\lvert \mathcal{L} \rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert S \rvert}{\lvert \mathcal{S} \rvert}\right)$	$\frac{WLQ^{-1}I^{-1}}{\mathfrak{W}\mathcal{L}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{I}^{-1}}$

Ces diverses grandeurs ont, relativement aux grandeurs fondamentales L, T, F, Q, $\mathcal{M}$, I, des *dimensions* représentées par les symboles suivants :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS		SYMBOLES de DIMENSIONS
Densité électrique	linéaire.	QL^{-1}
	superficielle.	QL^{-2}
	solide.	QL^{-3}
Champ électrique.		FQ^{-1}
Flux de force.		FL^2Q^{-1}
Potentiel électrique.		FLQ^{-1}
Capacité.		$F^{-1}L^{-1}Q^2$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$\mathcal{M}L^{-1}$
	superficielle.	$\mathcal{M}L^{-2}$
	solide.	$\mathcal{M}L^{-3}$
Puissance d'un feuillet.		$\mathcal{M}L^{-1}$
Champ magnétique.		$F\mathcal{M}^{-1}$
Potentiel magnétique.		$FL\mathcal{M}^{-1}$
Moment magnétique.		$\mathcal{M}L$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	FLQ^{-1}
Conductibilité.	$F^{-1}L^{-1}QI$
Résistance.	$FLQ^{-1}I^{-1}$
Résistance spécifique.	$FL^2Q^{-1}I^{-1}$

Si, dans les expressions précédentes, on remplace Q, $\mathcal{M}$, I par leurs symboles de dimensions tirés des formules

$$F = \frac{kQ^2}{L^2},$$

$$F = \frac{k' \mathcal{M}^2}{L^2},$$

$$dF = \frac{h \mathcal{M} I \, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$I = j \frac{Q}{T},$$

on obtient les symboles suivants :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS		SYMBOLES de DIMENSIONS
Densité électrique	linéaire.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
	solide.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}$
Champ électrique.		$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
Flux de force.		$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L$
Potentiel électrique.		$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
Capacité.		$k^{-1}L$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$k'^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$k'^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
	solide.	$k'^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$k'^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.		$k'^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
Potentiel magnétique.		$k'^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$k'^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{2}$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$		
Conductibilité.	$\dfrac{k'^{\frac{1}{2}}}{hk^{\frac{1}{2}}}$	ou	$k^{-1}j\,\dfrac{L}{T}$
Résistance.	$\dfrac{hk^{\frac{1}{2}}}{k'^{\frac{1}{2}}}$	ou	$kj^{-1}\,\dfrac{T}{L}$
Résistance spécifique.	$\dfrac{hk^{\frac{1}{2}}}{k'^{\frac{1}{2}}}L$	ou	$kj^{-1}\,T$

CHAPITRE III

Choix systématique des unités électriques et magnétiques.

Dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques, moins encore que dans celle des autres phénomènes physiques, le choix des unités employées dans les mesures ne saurait être livré à l'arbitraire. Prendre des unités en dehors de toute règle, ce serait ajouter gratuitement la complication de relations

numériques tout à fait incohérentes à la complication déjà assez grande des lois des phénomènes.

Puisque l'étude de tous les phénomènes physiques implique des mesures de grandeurs géométriques et mécaniques, il est clair que l'on doit avant tout faire profiter cette étude des avantages que comporte l'emploi dans ces mesures d'un système d'unités normales.

La première règle à suivre dans la constitution d'un système rationnel aussi parfait que possible d'unités physiques est donc de faire usage d'unités absolues géométriques et mécaniques.

Le calcul de la valeur numérique d'une grandeur dérivée à l'aide des valeurs numériques des grandeurs fondamentales dont elle dépend ayant son maximum de simplicité, si l'on choisit pour unité l'*unité normale* des grandeurs en question, la seconde règle à suivre sera évidemment d'adopter pour la mesure des grandeurs dérivées un système d'unités normales.

Pour constituer, suivant ces règles, un système rationnel d'unités électriques et magnétiques, il faut donc assigner : 1° des unités pour les grandeurs fondamentales géométriques et mécaniques; 2° des unités pour les grandeurs fondamentales électriques et magnétiques, et ensuite adopter pour les grandeurs dérivées les unités normales définies au moyen de ces unités fondamentales.

Mais les unités fondamentales électriques et magnétiques peuvent-elles, de même que les unités fondamentales géométriques et mécaniques, être prises d'une façon arbitraire?

Les formules

$$(1) \qquad F = k\frac{QQ'}{L^2},$$

$$(2) \qquad F = k'\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2},$$

$$(3) \qquad I = j\frac{Q}{T},$$

$$(4) \qquad dF = \frac{h\mathfrak{M}I\,ds\sin\theta}{l^2},$$

(5) $$d^2F = a\frac{II'\,ds\,ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

dans lesquelles des mesures de grandeurs fondamentales électriques et magnétiques sont associées à des mesures de grandeurs fondamentales géométriques et mécaniques, peuvent trancher la question.

La formule

$$F = k\frac{QQ'}{L^2}$$

suppose que la quantité d'électricité prise pour unité est celle qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance une répulsion égale à k fois l'unité de force.

La formule

$$F = k'\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2}$$

suppose que la masse magnétique prise pour unité est la masse qui, placée à l'unité de distance d'une masse égale, exerce sur elle une répulsion égale à k' fois l'unité de force.

La formule

$$I = j\frac{Q}{T}$$

suppose que l'intensité unité est celle d'un courant qui met en jeu dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à la fraction $\frac{1}{j}$ de l'unité de quantité.

De la formule

$$dF = \frac{h\mathcal{M}I\,ds\sin\theta}{l^2}$$

on déduit, pour l'expression de l'action exercée par un courant rectiligne indéfini sur une masse m située à une distance L,

$$F = \frac{2h\mathcal{M}I}{L^2}.$$

Cette formule suppose que l'intensité unité est l'intensité d'un courant rectiligne indéfini exerçant sur la masse magnétique

unité placée à l'unité de distance une action égale à $2h$ fois l'unité de force.

Enfin, de la formule

$$d^2F = a \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2 \cos \omega - 3 \cos \theta \cos \theta')$$

on déduit, pour l'expression de l'action exercée par un courant rectiligne indéfini sur un courant parallèle de longueur L et situé à une distance D du premier,

$$F = \frac{2aII'L}{D}.$$

Cette formule suppose qu'un courant indéfini d'intensité égale à l'unité exerce sur un courant parallèle de même intensité ayant une longueur égale à l'unité et placé à l'unité de distance du premier une action égale à $2a$ fois l'unité de force.

La définition des unités fondamentales électriques et magnétiques se trouve ainsi subordonnée à la considération des valeurs numériques des paramètres

$$k, \quad k', \quad j, \quad h, \quad a.$$

Si ces paramètres peuvent recevoir des valeurs arbitraires indépendantes du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques, les unités fondamentales électriques et magnétiques seront aussi arbitraires.

Si, au contraire, il existe entre ces paramètres des relations nécessaires et si leurs valeurs numériques dépendent du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques, les unités fondamentales électriques et magnétiques seront assujetties à une certaine corrélation.

Dans le premier cas, la façon la plus simple de profiter de l'indétermination absolue du choix des paramètres consisterait à les prendre tous égaux à l'unité.

Dans le second cas, les formules ne pourraient pas recevoir toutes à la fois une pareille simplification pour tous les systèmes possibles d'unités géométriques et mécaniques.

La question est donc de savoir si les paramètres k, k', j, h, a peuvent être considérés comme des coefficients sans dimensions, invariables et indépendants les uns des autres, ou s'ils doivent être considérés comme dépendant des unités fondamentales géométriques et mécaniques et liés entre eux.

Les formules (1), (2), (3), (4), (5) supposent entre les dimensions des diverses grandeurs qui y figurent les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{dim. } Q &= \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k}},\\
\text{dim. } \mathcal{M} &= \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k'}},\\
\text{dim. } I &= \text{dim. } j \frac{Q}{T},\\
\text{dim. } I &= \text{dim. } \frac{F L}{h \mathcal{M}},\\
\text{dim. } I &= \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Entre ces relations, on peut éliminer dim. Q, dim. $\mathcal{M}$, dim. I, ce qui se fait très simplement en égalant entre elles les expressions de dim. I fournies par les trois dernières égalités et y introduisant les expressions de dim. Q et de dim. $\mathcal{M}$ données par les deux premières. On obtient ainsi les relations

$$\text{dim. } \frac{j}{T} \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k}} = \text{dim. } \frac{F L}{h \dfrac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k'}}} = \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\text{dim. } \frac{j}{\sqrt{k}} \frac{L}{T} = \text{dim. } \frac{\sqrt{k'}}{h} = \text{dim. } \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\text{dim. } a = \text{dim. } \frac{h^2}{k'}$$

et

$$\text{dim.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{dim.}\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}.$$

Ces relations montrent que les paramètres k, k', j, h, a ne sauraient être des coefficients sans dimensions, mais qu'au contraire leurs valeurs numériques dépendent des unités fondamentales qu'elles changent avec ces dernières et que ces changements sont liés entre eux d'une manière déterminée.

La première relation

$$\text{dim.}\ a = \text{dim.}\ \frac{h^2}{k'}$$

indique qu'un changement des unités fondamentales géométriques et mécaniques fait varier dans un même rapport la valeur numérique de a et la valeur numérique de $\frac{h^2}{k'}$, ou bien que ce changement laisse invariable le quotient

$$\frac{a}{\frac{h^2}{k'}}.$$

La seconde relation

$$\text{dim.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{dim.}\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$$

indique qu'un changement des unités fondamentales fait varier la valeur numérique de $\frac{\sqrt{kk'}}{jh}$ dans le même rapport que la valeur numérique d'une vitesse déterminée. Désignons par $|V_i|$ la vitesse qui, dans un système particulier d'unités, a une valeur numérique égale à la valeur numérique, dans le même système, de l'expression $\frac{\sqrt{kk'}}{jh}$. La relation

$$\text{val. numér.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{val. numér.}\ |V_i|$$

subsistera dans tous les systèmes d'unités.

Soit V_i la valeur numérique, dans un système déterminé, de la vitesse en question. On a, entre les valeurs numériques des paramètres k, k', j, h, dans ce même système, la relation

$$\frac{\sqrt{kk'}}{jh} = V_i$$

ou

$$\frac{kk'}{j^2h^2} = V_i^2.$$

L'incertitude qui existe encore, dans l'état actuel de la science, relativement à la nature des grandeurs représentées par ces divers paramètres, laisse subsister une certaine indétermination dans la fixation de leurs valeurs numériques et peut donner lieu à une infinité de systèmes d'unités électriques et magnétiques. On peut mettre à profit cette indétermination pour prendre égaux à l'unité et considérer comme étant sans dimensions certains d'entre ces paramètres.

Relativement à la valeur à attribuer à la constante

$$\frac{\frac{a}{h^2}}{k'},$$

il n'y a pas d'hésitation possible si l'on remarque qu'en adoptant pour cette constante la valeur 1, on rend identiques les valeurs numériques de l'action d'un courant sur un autre courant calculée, soit directement en faisant usage de la formule d'Ampère, soit d'une manière indirecte en faisant usage de la formule élémentaire de l'électromagnétisme, c'est-à-dire en ayant égard au champ magnétique créé par le courant considéré.

Si l'on adopte la relation

$$\frac{\frac{a}{h^2}}{k'} = 1$$

ou $\frac{k'}{h^2} = \frac{1}{a}$, la relation

$$\frac{k k'}{j^2 h^2} = V_1^2$$

devient

$$\frac{k}{j^2 a} = V_1^2.$$

Un courant d'intensité I et un feuillet magnétique de même contour et de puissance Φ donnent lieu au même champ magnétique s'il existe entre I et Φ la relation

$$h\mathrm{I} = k'\Phi.$$

L'équivalence entre un courant et un feuillet magnétique de même contour serait caractérisée par la relation simple

$$\mathrm{I} = \Phi,$$

si l'on avait

$$h = k'.$$

Il y aura donc avantage à joindre cette relation simplificatrice aux précédentes.

En résumé, si l'on n'a en vue que la plus grande simplification des formules, on choisira les valeurs numériques des paramètres en tenant compte des relations

$$\frac{\frac{a}{h^2}}{k'} = 1,$$

$$h = k',$$

$$\frac{k}{j^2 a} = V_1^2,$$

qui équivalent aux suivantes :

$$a = k' = h,$$

$$\frac{k}{j^2 a} = V_1^2.$$

D'après cela, les divers paramètres seront complètement déterminés si l'on se donne deux de ceux qui figurent dans la relation

$$\frac{k}{j^2 a} = V_i^2.$$

En prenant égaux à l'unité deux de ces trois paramètres, on a les trois systèmes de valeurs qui suivent :

$$(1)\quad k = 1,\quad j = 1,\quad a = \frac{1}{V_i^2},\quad k' = \frac{1}{V_i^2},\quad h = \frac{1}{V_i^2}.$$

$$(2)\quad k = V_i^2,\quad j = 1,\quad a = 1,\quad k' = 1,\quad h = 1.$$

$$(3)\quad k = 1,\quad j = \frac{1}{V_i^2},\quad a = 1,\quad k' = 1,\quad h = 1.$$

Pour avoir à la fois

$$k = 1,\quad j = 1,\quad h = 1,$$

il faudrait renoncer à la relation

$$h = k'.$$

On aurait alors le système suivant, indiqué par Maxwell :

$$(4)\quad k = 1,\quad j = 1,\quad a = \frac{1}{V_i^2},\quad k' = V_i^2,\quad h = 1.$$

Le système (1) a été proposé par Clausius, le système (2) par Weber et par l'Association britannique, le système (3) par M. Bertrand.

A ces divers systèmes de valeurs des paramètres correspondent autant de modes différents de définition des grandeurs fondamentales électriques et magnétiques, et par conséquent autant de systèmes différents d'unités électriques et magnétiques.

Les systèmes tels que (1) et (4) donnent la forme la plus simple possible aux formules de l'électrostatique. On les désigne sous le nom de *systèmes électrostatiques*.

Le système (2) donne la forme la plus simple possible aux

formules du magnétisme et de l'électromagnétisme. On le désigne sous le nom de *système électromagnétique*.

Le système (3) jouit de l'un et de l'autre avantage.

Examinons en détail ces différents systèmes.

CHAPITRE IV

Systèmes électrostatiques.

Art. 1. — *Système électrostatique de Clausius.*

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système, les formules fondamentales s'écrivent :

$$(1') \qquad F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$(2') \qquad F = \frac{1}{V_i^2}\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

$$(3') \qquad I = \frac{Q}{T},$$

$$(4') \qquad dF = \frac{1}{V_i^2}\frac{\mathcal{M} I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$(5') \qquad d^2F = \frac{1}{V_i^2}\frac{II'\, ds\, ds'}{l^2}(2\cos\theta - 3\cos\theta\cos\theta').$$

La quantité d'électricité unité est la quantité qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion égale à l'unité de force.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion dont la valeur numérique est égale à l'inverse du carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

L'intensité unité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à l'unité de quantité.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales basées sur les précédentes suivant les définitions données dans le chapitre II (livre III).

2. Dimensions des principales grandeurs.

Adopter les formules précédentes, c'est assigner aux grandeurs fondamentales électriques et magnétiques les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}} L,$$
$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}} L^2 T^{-1},$$
$$I = F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}.$$

D'après le tableau qui termine le chapitre II (livre III), il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

I. — *Électrostatique.*

		UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, F)	UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, M)
Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Capacité.		L	L

II. — *Magnétisme.*

Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-2} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^3 T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$

III. — *Électrocinétique.*

Force électromotrice.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$
Conductibilité.	LT^{-1}	LT^{-1}
Résistance.	$L^{-1}T$	$L^{-1}T$
Résistance spécifique.	T	T

Dans ce système, un potentiel électrique a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}}$) qu'une densité linéaire, et par suite une capacité a les mêmes dimensions (L) qu'une longueur; la dérivée première d'un potentiel suivant une ligne a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$) qu'un champ électrique; un flux de force a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}}L$) qu'une quantité d'électricité; un champ électrique a les mêmes dimensions qu'une densité superficielle; la dérivée seconde d'un potentiel a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}}L^{-2}$) qu'une densité électrique en un point.

Ces relations sont évidentes dans les formules simples, déduites de la loi de Coulomb, qui forment les éléments du calcul des phénomènes électrostatiques.

Ainsi, entre la valeur numérique V du potentiel en un point d'un champ dû à une masse électrique et les valeurs numériques Q, L de cette masse et de sa distance au point considéré, existe la relation

$$V = \frac{Q}{L}.$$

Entre la valeur numérique du potentiel d'une sphère conductrice et les valeurs numériques Q et L de sa charge et de son rayon existe la relation

$$V = \frac{Q}{L},$$

d'où il suit que la capacité d'une sphère est numériquement égale à son rayon.

Entre la valeur numérique de la composante d'un champ électrique suivant une direction donnée et la valeur numérique de la dérivée du potentiel suivant cette direction existe la relation

$$H_e = -\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Entre la valeur numérique $\int H_e ds$ du flux de force émanant d'une surface fermée et la valeur numérique ΣdQ de la somme des masses électriques situées à l'intérieur de la surface existe la relation

$$\int H_e ds = 4\pi \Sigma dQ.$$

Entre la valeur numérique H_e du champ électrique en un point infiniment voisin d'un conducteur électrisé et la valeur numérique σ de la densité superficielle au point correspondant de la surface du conducteur existe la relation

$$H_e = 4\pi\sigma.$$

Entre la valeur numérique de la somme des trois dérivées secondes du potentiel en un point et la valeur numérique ρ de la densité électrique en ce point existe la relation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

3. Remarques relatives aux résistances.

I

Une résistance a les mêmes dimensions que l'inverse d'une vitesse.

Voici, suivant S.-W. Thomson, une façon très simple d'imaginer une vitesse ayant une valeur numérique dont l'inverse est égale à la valeur numérique d'une résistance estimée suivant le système électrostatique :

Soit une sphère de rayon L possédant une charge Q. Si elle est mise en communication avec le sol par un fil conducteur, elle éprouve pendant le temps dt une perte de charge dQ. Imaginons qu'en même temps le rayon diminue de telle façon que le potentiel demeure constant. On aura

$$dQ = V dL.$$

L'une des extrémités du fil étant maintenue au potentiel V et l'autre au potentiel O, ce fil, de résistance R, est parcouru par un courant dont la valeur numérique est

$$I = \frac{V}{R}.$$

La quantité d'électricité qui s'écoule pendant le temps dt est par suite

$$I\,dt = \frac{V}{R}\,dt.$$

On a donc

$$dQ = V\,dL = \frac{V}{R}\,dt,$$

d'où

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{R}.$$

$\frac{dL}{dt}$ est la valeur numérique de la vitesse avec laquelle chaque point de la sphère se rapproche du centre et qu'on peut appeler vitesse de contraction.

Donc *la valeur numérique de la résistance d'un fil conducteur dans le système électrostatique est l'inverse de la valeur numérique de la vitesse avec laquelle une sphère électrisée reliée au sol par ce fil devrait se contracter pour conserver un potentiel constant, quelle que soit d'ailleurs la valeur de ce potentiel.*

II

Dans le système que nous considérons, une résistance spécifique a les dimensions d'un temps.

M. Lippmann [1] a indiqué une ingénieuse expérience permettant de réaliser une durée dont la valeur numérique soit une fraction connue de la valeur numérique d'une résistance spécifique donnée.

Soit un galvanomètre différentiel dont l'un des circuits est parcouru par un courant continu dû à une pile de force électromotrice E, l'autre circuit recevant une série discontinue de décharges obtenues à l'aide d'un condensateur de capacité C chargé périodiquement par la même pile.

Le premier circuit, de résistance R, débite pendant un temps τ une quantité d'électricité égale à

$$\frac{E}{R}\tau.$$

---

[1] *Sur une unité de temps absolue. Étalons électriques de temps et chronoscopes des variations.* (*Journ. de phys.*, 2e s., t. VI (1887), p. 261.)

Si t est l'intervalle de temps qui sépare deux décharges du condensateur, le nombre de décharges effectuées pendant le temps τ est $\frac{\tau}{t}$, et la quantité d'électricité débitée par le deuxième circuit pendant ce temps est

$$\frac{\tau}{t}\,\mathrm{CE}.$$

On peut supposer l'intervalle de deux décharges réglé de f..çon que le débit de ce dernier circuit soit égal à celui du premier. L'aiguille du galvanomètre n'éprouvera alors aucune déviation. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\frac{\tau}{t}\,\mathrm{CE} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\,\tau$$

ou

$$t = \mathrm{CR}.$$

Or, soit p le rapport de la capacité du condensateur à celle d'une sphère isolée de rayon l. Soit q le rapport de la résistance du premier circuit à la résistance d'un cube de mercure à 0° ayant pour côté une longueur l. On a

$$\mathrm{C} = pl,$$

$$\mathrm{R} = q\rho\,\frac{l}{l^2} = q\,\frac{\rho}{l},$$

$$\mathrm{CR} = pq\rho,$$

et par suite

$$t = pq\rho.$$

Donc lorsque dans l'appareil défini tout à l'heure l'aiguille du galvanomètre est au zéro, la valeur numérique t de l'intervalle de deux décharges est une fraction pq de la valeur numérique ρ de la résistance spécifique du mercure à 0°.

« Indépendamment de l'usage qu'on peut en faire pour mesurer le temps en valeur absolue, conclut M. Lippmann, l'appareil qui vient d'être décrit jouit de propriétés particulières. Il constitue une sorte d'horloge qui indique, qui enregistre et peut au besoin corriger elle-même ses variations de vitesse. L'appareil étant réglé de manière que l'aiguille aimantée soit au zéro, il suffit que la vitesse du commutateur augmente légèrement pour que l'équilibre soit troublé et que l'aiguille

aimantée dévie dans le sens correspondant; si la vitesse, au contraire, diminue, c'est l'action du circuit antagoniste qui l'emporte et l'aiguille dévie en sens contraire. Ces déviations, quand elles sont petites, sont proportionnelles aux variations de vitesse. Or, on peut d'abord les noter; on peut, en outre, les enregistrer soit par la photographie, soit en employant un appareil Rédier, comme celui que M. Mascart a adapté à son électromètre à quadrant; enfin, on peut charger ledit Rédier de réagir sur la vitesse de manière à réduire à zéro ses variations. Si ces variations ne sont pas complètement annulées, elles n'en seront pas moins enregistrées, de sorte qu'on en pourra tenir compte. »

Art. 2. — *Système électrostatique de Maxwell.*

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système, les formules fondamentales s'écrivent :

$$F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$F = V_i^2 \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2},$$

$$I = \frac{Q}{T},$$

$$dF = \frac{\mathfrak{M} I \, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$d^2F = \frac{1}{V_i^2} \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta').$$

La quantité d'électricité unité et par suite l'intensité unité sont les mêmes que dans le système précédent.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance une répulsion dont la valeur numérique est égale au carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Les dimensions des grandeurs électriques sont les mêmes que dans le système précédent.

Les dimensions des grandeurs magnétiques sont différentes, ainsi que le montre le tableau suivant :

Masse magnétique.	$F^{\frac{1}{2}} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$
Densité magnétique — linéaire.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
Densité magnétique — superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
Densité magnétique — solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-3} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}}$
Puissance d'un feuillet.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.	$F^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Potentiel magnétique.	$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Moment magnétique.	$F^{\frac{1}{2}} L T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}$

Puisque dans ce système on n'a pas

$$k' = h,$$

la valeur numérique de l'intensité d'un courant n'est pas égale à la valeur numérique de la puissance du feuillet magnétique de même contour équivalent. Entre ces valeurs numériques existe la relation

$$I = V_1^2 \Phi.$$

Art. 3. — *Mesures électrostatiques.*

Les grandeurs qui forment les principaux objets des mesures électriques ou magnétiques sont :

Dans le domaine de l'électrostatique,
- les potentiels,
- les capacités,
- les charges électriques;

Dans le domaine de l'électrocinétique,
- les forces électromotrices,
- les intensités de courants,
- les résistances;

Dans le domaine du magnétisme,
- les champs magnétiques,
- les moments magnétiques.

Les autres grandeurs sont plutôt des objets de calcul.

Les grandeurs dont les mesures en unités électrostatiques s'obtiennent le plus directement sont les grandeurs électrostatiques.

Les appareils nommés électromètres absolus permettent de déduire immédiatement de mesures géométriques et mécaniques la valeur absolue des différences de potentiel et par suite des forces électromotrices.

Un condensateur sphérique, un condensateur plan présentent des capacités électrostatiques pouvant être évaluées directement d'après leurs dimensions. Par comparaison, ils permettent d'évaluer la capacité électrostatique d'un conducteur ou d'un condensateur quelconques.

Des valeurs numériques de la différence de potentiel aux armatures et de la capacité d'un condensateur quelconque, on peut déduire la valeur numérique de sa charge à l'aide de la formule

$$Q = CV.$$

Si ce condensateur, mis en relation avec une source capable d'établir entre ses deux armatures la différence de potentiel V, est déchargé dans un circuit n fois par seconde, ce circuit est le siège d'un débit d'électricité égal à

$$nCV.$$

On a alors le moyen d'évaluer l'intensité d'un courant en cherchant quelle valeur doit avoir le nombre n pour que la décharge périodique du condensateur dans un circuit identique à celui du courant produise le même effet que ce dernier. Le débit d'électricité étant le même de part et d'autre, on a

$$I = nCV.$$

De la mesure de l'intensité d'un courant et de celle de la différence de potentiel existant entre deux points de circuit, on déduit la valeur numérique de la résistance comprise entre ces deux points par la formule

$$R = \frac{E}{I}.$$

La connaissance de l'intensité d'un courant conduit à celle

du champ magnétique créé par ce courant, et par comparaison, avec ce champ magnétique, on arrive à connaître le champ magnétique terrestre. On peut alors, d'après la méthode de Gauss, déterminer le moment magnétique d'un aimant quelconque.

On voit ainsi comment, dans une première mise en pratique du système électrostatique, devraient être enchaînées les mesures correspondant aux divers ordres de phénomènes.

La possibilité d'utiliser les résultats des mesures une fois faites simplifie ensuite considérablement les mesures subséquentes.

Si l'on est en possession d'un conducteur dont la résistance est connue, la mesure d'une résistance quelconque se fera par une simple comparaison avec la première.

La détermination de l'intensité d'un courant pourra s'obtenir à l'aide de la différence de potentiel V existant entre les extrémités d'une résistance R faisant partie du circuit, d'après la formule

$$I = \frac{V}{R},$$

ou bien directement à l'aide d'un galvanomètre, d'un électrodynamomètre, d'un voltamètre et en général d'un appareil fondé sur un effet quelconque des courants, gradué une fois pour toutes.

La connaissance de l'intensité d'un courant conduit à celle de la différence de potentiel que ce courant établit entre les extrémités d'une résistance connue, et cette différence de potentiel peut servir à évaluer une différence de potentiel ou une force électromotrice quelconque.

La multiplicité des relations existant entre les diverses grandeurs que l'on peut avoir à évaluer; la possibilité de considérer à volonté comme inconnue l'une quelconque des grandeurs figurant dans chaque relation rendent, comme on le voit, extrêmement variée et fertile en ressources la pratique courante des mesures électriques.

CHAPITRE V

Système électro-magnétique.

---

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système les formules fondamentales s'écrivent :

(1') $$F = V_i^2 \frac{QQ'}{L^2},$$

(2') $$F = \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

(3') $$I = \frac{Q}{T},$$

(4') $$dF = \frac{\mathcal{M} I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

(5') $$d^2F = \frac{II'\, ds\, ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta').$$

La quantité d'électricité prise pour unité est celle qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion dont la valeur numérique est égale au carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance une répulsion égale à l'unité de force.

L'intensité unité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à l'unité de quantité.

Le champ magnétique créé par un courant rectiligne indéfini en un point situé à une distance L de ce courant est donné par l'expression

$$H = \frac{2I}{L}.$$

Le champ magnétique créé en son centre par un courant circulaire de rayon L est donné par l'expression

$$H = \frac{2\pi I}{L}.$$

On peut donc définir l'unité d'intensité dans le système électromagnétique comme étant l'intensité que devrait avoir un courant rectiligne indéfini pour donner lieu, en un point distant de l'unité de longueur, à un champ magnétique égal à 2 fois le champ magnétique unité; ou encore comme étant l'intensité que devrait avoir un courant circulaire de rayon 1, pour donner lieu en son centre à un champ magnétique ayant une valeur numérique égale à 2π.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales définies comme on l'a vu au chap. II (liv. III).

La formule

$$W = RI^2T$$

permet de définir l'unité de résistance comme égale à la résistance d'un conducteur dans lequel un courant d'intensité égale à l'unité dégagerait pendant l'unité de temps une quantité d'énergie égale à l'unité.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Adopter les formules écrites en tête de ce chapitre, c'est assigner aux grandeurs fondamentales électriques et magnétiques les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}}T,$$
$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}}L,$$
$$I = F^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le tableau du chap. II (liv. III), il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

I

Électrostatique.

		UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, F)	UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, M)
Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-3} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Capacité.		$L^{-1} T^{2}$	$L^{-1} T^{2}$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Conductibilité.	$L^{-1} T$	$L^{-1} T$
Résistance.	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
Résistance spécifique.	$L^{2} T^{-1}$	$L^{2} T^{-1}$

Dans ce système, les dimensions des diverses grandeurs magnétiques sont les mêmes que celles des grandeurs électriques de mêmes noms dans le système électrostatique.

L'exposant de F ou de M dans le symbole électromagnétique d'une grandeur donnée est le même que dans le symbole électrostatique.

Le symbole des dimensions d'une résistance est celui d'une vitesse, c'est-à-dire l'inverse de ce qu'il est dans le système électrostatique.

La réalisation d'une vitesse numériquement égale à une résistance donnée pourrait être obtenue à l'aide de l'expérience suivante :

Soit une boussole des tangentes de résistance R mise en relation avec deux barres parallèles de résistance négligeable, séparées par un intervalle L et sur lesquelles une barre perpendiculaire aux premières et comme elles sans résistance appréciable peut glisser parallèlement à leur direction. — Supposons les barres parallèles placées dans un champ magnétique ayant une composante $\mathcal{H}$ perpendiculaire à leur plan. Le déplacement de la barre mobile fait varier le flux de force magnétique traversant le circuit du galvanomètre. Si $\mathcal{V}$ est la vitesse de translation de cette barre, la variation du flux de force pendant l'unité de temps est égale à

$$\mathcal{H}\mathcal{V}L.$$

Telle est aussi la valeur numérique de la force électromotrice induite dans le circuit. L'intensité du courant induit a donc une valeur numérique égale à

$$\frac{\mathcal{H}\mathcal{V}L}{R}.$$

Une seconde expression de cette intensité est donnée par la boussole, savoir :

$$\frac{H}{G}\operatorname{tg}\delta,$$

G étant la constante de la boussole calculable d'après ses dimensions, H la composante horizontale du champ magnétique terrestre et δ la déviation observée.

De l'égalité

$$\frac{\mathcal{H}\mathcal{V}L}{R} = \frac{H}{G}\operatorname{tg}\delta$$

on déduit

$$R = \mathfrak{V} \frac{\mathcal{H}}{H} G L \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Supposons le plan des barres parallèles vertical et perpendiculaire au méridien magnétique. Alors on a $\mathcal{H} = H$. Si, de plus, l'écartement L de ces barres est tel que $GL = 1$, on a

$$R = \mathfrak{V} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Dans ces conditions, la résistance du fil de la boussole est numériquement égale à la vitesse avec laquelle devrait se produire le déplacement de la barre mobile pour donner lieu à une déviation de 45° (1).

3. Mesures électromagnétiques.

Les grandeurs dont la mesure en unités électromagnétiques peut s'obtenir directement à l'aide de mesures géométriques et mécaniques sont :

L'intensité du champ magnétique terrestre;

Le moment magnétique d'un aimant;

L'intensité d'un courant.

La valeur absolue du champ magnétique terrestre est donnée par la méthode de Gauss.

La valeur absolue de l'intensité d'un courant peut être obtenue à l'aide de la mesure d'actions électrodynamiques.

La comparaison du champ magnétique d'un courant au champ magnétique terrestre conduit à la mesure des intensités de courants à l'aide des appareils électromagnétiques.

Les phénomènes d'induction dus au champ terrestre donnent des forces électromotrices directement calculables.

La mesure absolue d'une intensité de courant et la mesure absolue d'une force électromotrice permettent d'obtenir la mesure absolue d'une résistance.

L'établissement d'un étalon absolu de résistance a été l'objet de travaux considérables, en raison de la grande importance

(1) Voir la note V.

pratique que présentent, grâce à leur simplicité, les méthodes de mesure fondées sur l'emploi de résistances connues.

4. Remarque sur le système électrodynamique employé par Ampère.

Dans ses calculs relatifs aux phénomènes électrodynamiques, Ampère a fait usage de la formule élémentaire suivante :

$$d^2F = \frac{II'\,ds\,ds'}{l^2}(\cos\omega - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').$$

Dans le système électromagnétique, on emploie la formule

$$d^2F = \frac{II'\,ds\,ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta').$$

Ces deux formules sont des cas particuliers de la formule générale

$$d^2F = a\frac{II'\,ds\,ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

correspondant l'un à la valeur $\frac{1}{2}$, l'autre à la valeur 1 du coefficient a.

D'une manière générale si l'on donne à a successivement deux valeurs différentes : a_1, a_2, sans changer d'ailleurs les unités géométriques et mécaniques, les valeurs numériques I_1, I_2 d'un même courant, calculées à l'aide de la formule précédente, ont entre elles la relation suivante :

$$I_1\sqrt{a_1} = I_2\sqrt{a_2}.$$

Soient I_a et I_m les valeurs numériques d'un même courant dans le système d'Ampère et dans le système électromagnétique. On a, en faisant $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = 1$,

$$I_a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = I_m.$$

L'unité d'intensité de courant adoptée par Ampère est donc la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de l'unité électromagnétique.

CHAPITRE VI

Système de M. Bertrand.

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système les formules fondamentales s'écrivent :

$$F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$F = \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

$$I = \frac{1}{V_i}\frac{Q}{T},$$

$$dF = \frac{\mathcal{M}\, I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$d^2F = \frac{II'\, ds\, ds'}{l^2}(2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta').$$

L'unité de quantité d'électricité est la même que dans le système électrostatique.

L'unité de masse magnétique est la même que dans le système électromagnétique.

L'unité d'intensité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité dont la valeur numérique est égale à la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales déduites des précédentes.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Les formules précédentes assignent aux grandeurs fondamentales Q, $\mathcal{M}$, I les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}}L,$$

$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}}L,$$

$$I = \frac{Q}{L} = F^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}}$
Capacité.		L
Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2}$
Force électromotrice.		$F^{\frac{1}{2}}$
Conductibilité.		$F^{0} L^{0}$
Résistance.		$F^{0} L^{0}$

Dans ce système les dimensions des grandeurs relatives à l'électrostatique sont les mêmes que dans le système électrostatique; les dimensions des grandeurs magnétiques, celles d'une intensité de courant et d'une force électromotrice sont les mêmes que dans le système électromagnétique; par contre la conductibilité et la résistance sont des coefficients sans dimensions.

Pour voir nettement ce qu'est, dans ce système, la valeur numérique d'une résistance, considérons, comme nous l'avons fait à propos du système électrostatique, une sphère électrisée mise en communication avec le sol par un fil conducteur et se contractant de façon que son potentiel conserve une valeur constante.

On a toujours

$$dQ = V dL,$$

$$I = \frac{V}{R};$$

mais dans le système actuel on a

$$dQ = V_i I dt,$$

par suite

$$V dL = V_i \frac{V}{R} dt,$$

d'où

$$R = \frac{V_i}{\frac{dL}{dt}},$$

ce qui signifie que la valeur numérique de la résistance du fil est égale au rapport de la vitesse $|V_i|$ à la vitesse de contraction de la sphère. Cette valeur numérique est évidemment indépendante du choix des unités de longueur de temps et de force.

CHAPITRE VII

Détermination du coefficient V_i. — Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.

Art. 1. — *Comparaison des valeurs numériques d'une même grandeur dans les systèmes électrostatique et électromagnétique.*

1. Valeurs numériques d'une même quantité d'électricité.

Considérons deux petits corps électrisés possédant une même charge électrique. Soient Q_e et Q_m les valeurs numériques de cette charge dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique. Le produit de la valeur numé-

rique F de la répulsion de ces deux corps par le carré de la valeur numérique de leur distance L est lié aux valeurs numériques Q_e et Q_m par les relations

$$FL^2 = Q_e^2,$$
$$FL^2 = V_i^2 Q_m^2.$$

On a donc entre les valeurs numériques d'une même quantité d'électricité dans les deux systèmes la relation

$$Q_e^2 = V_i^2 Q_m^2$$

ou

$$\frac{Q_e}{Q_m} = V_i.$$

2. Valeurs numériques d'une même intensité de courant.

Soient Q_e et Q_m les valeurs numériques de la quantité d'électricité $|Q|$ transportée par un courant en un temps $|T|$. Les valeurs numériques de l'intensité de ce courant dans les deux systèmes considérés sont respectivement

$$I_e = \frac{Q_e}{T},$$
$$I_m = \frac{Q_m}{T}.$$

On a donc entre les deux valeurs numériques de l'intensité d'un même courant la relation

$$\frac{I_e}{I_m} = \frac{Q_e}{Q_m}$$

ou

$$\frac{I_e}{I_m} = V_i.$$

3. Valeurs numériques d'un même potentiel ou d'une même force électromotrice.

Considérons le travail $|W|$ nécessaire pour amener une certaine quantité d'électricité $|Q|$ d'un point où le potentiel est

nul en un point où le potentiel est $|V|$. La valeur numérique de ce travail sera donnée par l'une ou l'autre des deux expressions

$$W = V_e Q_e,$$
$$W = V_m Q_m,$$

suivant qu'on évaluera $|V|$ et $|Q|$ dans le système électrostatique ou dans le système électromagnétique.

On a donc entre les valeurs numériques d'un même potentiel dans ces deux systèmes la relation

$$\frac{V_e}{V_m} = \frac{Q_m}{Q_e}$$

ou

$$\frac{V_e}{V_m} = \frac{1}{V_i}.$$

4. Valeurs numériques d'une même capacité.

La capacité d'un condensateur entre les deux armatures duquel une charge $|Q|$ établit une différence de potentiel $|V|$ sera représentée par le nombre

$$C_e = \frac{Q_e}{V_e}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$C_m = \frac{Q_m}{V_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{C_e}{C_m} = \frac{Q_e}{Q_m}\frac{V_m}{V_e},$$

ou, si l'on tient compte des relations précédentes,

$$\frac{C_e}{C_m} = V_i^2.$$

5. Valeurs numériques d'une même résistance.

La résistance d'un conducteur dans lequel une force électromotrice |V| établit un courant |I| sera représentée par le nombre

$$R_e = \frac{V_e}{I_e}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$R_m = \frac{V_m}{I_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{V_e}{V_m} \frac{I_m}{I_e}$$

ou, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{1}{V_i^2}.$$

6. Valeurs numériques d'une même grandeur quelconque.

Soit en général |G| une grandeur quelconque électrique ou magnétique. Si ses symboles de dimensions dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique sont respectivement :

$$L^{\lambda}\, T^{\tau}\, F^{\varphi};$$
$$L^{\lambda'}\, T^{\tau'} F^{\varphi},$$

on a

$$G_m = V_i^{\gamma} G_e,$$

γ ayant la valeur $\lambda' - \lambda$ ou $\tau - \tau'$. Donc

$$\frac{G_e}{G_m} = V_i^{\lambda - \lambda'}$$

ou

$$\frac{G_e}{G_m} = V_i^{\tau'-\tau}.$$

On retiendra aisément la relation simple qui lie λ, λ', τ et τ' si on la met sous la forme

$$\lambda + \tau = \lambda' + \tau'.$$

Art. 2. — *Détermination expérimentale du coefficient* V_i.

Toutes les grandeurs électriques ne se prêtent pas également bien à une mesure électrostatique en même temps qu'à une mesure électromagnétique. Celles dont la mesure électrostatique est la plus directe, savoir : *la quantité d'électricité, la force électromotrice et la capacité électrique,* se sont offertes naturellement comme étant les plus propres à la détermination expérimentale du coefficient V_i.

La première détermination de ce coefficient a été faite en 1856 par Weber et Kohlrausch (1) au moyen d'une double mesure de quantité.

Les nombreuses déterminations faites depuis lors par divers expérimentateurs reposent toutes soit sur une double mesure de force électromotrice à l'exemple de celle qu'imagina en 1869 sir W. Thomson (2), soit sur une double mesure de capacité dont MM. Ayrton et Perry ont donné en 1879 le premier exemple (3).

Voici, en rapportant toutes les mesures aux unités fondamentales (CGS), le tableau des résultats obtenus :

1856.	Weber et Kohlrausch.	$3{,}107.10^{10}$
1869.	W. Thomson et King.	2,846
1869.	Maxwell (4).	2,88

(1) *Electr. Maasb. Abh. der K. S. Ges. der Wissensch.*, t. V, p. 219.

(2) *Brit. Assoc. Rep.* (1869), p. 434.

(3) *Journal of tel. Eng.*, t. VIII (1879), p. 126, et *Phil. mag.*, 5e s., t. VII (1879), p. 277.

(4) *Brit. Assoc. Rep.* (1869), p. 436.

1872.	Dugald M'Kichan ([1]).	2,935
1879.	Ayrton et Perry.	2,980
1880.	Shida ([2]).	2,995
1883.	J.-J. Thomson ([3]).	2,920
1884.	Klemencie ([4]).	3,019
1886.	Colley ([5]).	3,015
1888.	Himstedt ([6]).	3,007
1888.	W. Thomson, Ayrton et Perry ([7]).	3,004
1889.	Rosa ([8]).	3,000
1890.	J.-J. Thomson ([9]).	2,9956
1891.	Pellat ([10]).	3,009

Les premières déterminations faites en Angleterre sont affectées d'une erreur assez notable provenant d'une évaluation trop forte de l'étalon de résistance de l'Association britannique employé dans les mesures électromagnétiques. Pour être corrigés de cette erreur, les résultats de ces déterminations doivent être diminués d'environ 0,013 de leur valeur.

On a alors le tableau suivant :

1856.	Weber et Kohlrausch.	$3,107.10^{10}$
1869.	W. Thomson et King.	2,808
1869.	Maxwell.	2,843
1872.	Dugald M'Kichan.	2,896
1879.	Ayrton et Perry.	2,960
1880.	Shida.	2,955
1883.	J.-J. Thomson.	2,920
1884.	Klemencie.	3,019
1886.	Colley.	3,015
1888.	Himstedt.	3,007
1889.	W. Thomson.	3,004

(1) *Philos. trans. L. R. S.*, for. 1879, p. 409-427.
(2) *Philos. mag.*, 5e s., t. X (1880), p. 431.
(3) *Philos. trans. L. R. S.*, for. 1883, p. 707.
(4) *Wiener Ber.*, 3e s., t. LXXXIII (1884), p. 88.
(5) *Wied. Ann.*, XXVIII (1885), p. 1-21.
(6) *Wied. Ann.*, XXIX (1888), p. 560.
(7) *Rep. of the Brith. assoc. Bath* (1888), p. 616.
(8) *Philos. mag.*, 5e s., t. XXVIII, p. 315.
(9) *Soc. roy. de Londres*, 27 mars 1890.
(10) *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 13 avril 1891.

nul en un point où le potentiel est $|V|$. La valeur numérique de ce travail sera donnée par l'une ou l'autre des deux expressions

$$W = V_e Q_e,$$
$$W = V_m Q_m,$$

suivant qu'on évaluera $|V|$ et $|Q|$ dans le système électrostatique ou dans le système électromagnétique.

On a donc entre les valeurs numériques d'un même potentiel dans ces deux systèmes la relation

$$\frac{V_e}{V_m} = \frac{Q_m}{Q_e}$$

ou

$$\frac{V_e}{V_m} = \frac{1}{V_i}.$$

4. Valeurs numériques d'une même capacité.

La capacité d'un condensateur entre les deux armatures duquel une charge $|Q|$ établit une différence de potentiel $|V|$ sera représentée par le nombre

$$C_e = \frac{Q_e}{V_e}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$C_m = \frac{Q_m}{V_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{C_e}{C_m} = \frac{Q_e}{Q_m}\frac{V_m}{V_e},$$

ou, si l'on tient compte des relations précédentes,

$$\frac{C_e}{C_m} = V_i^2.$$

5. Valeurs numériques d'une même résistance.

La résistance d'un conducteur dans lequel une force électromotrice $|V|$ établit un courant $|I|$ sera représentée par le nombre

$$R_e = \frac{V_e}{I_e}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$R_m = \frac{V_m}{I_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{V_e}{V_m}\frac{I_m}{I_e}$$

ou, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{1}{V_1^2}.$$

6. Valeurs numériques d'une même grandeur quelconque.

Soit en général $|G|$ une grandeur quelconque électrique ou magnétique. Si ses symboles de dimensions dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique sont respectivement :

$$L^{\lambda}\, T^{\tau}\, F^{\varphi};$$
$$L^{\lambda'}\, T^{\tau'}\, F^{\varphi'},$$

on a

$$G_m = V_1^{\nu} G_e,$$

ν ayant la valeur $\lambda' - \lambda$ ou $\tau - \tau'$. Donc

$$\frac{G_e}{G_m} = V_1^{\lambda - \lambda'}$$

1889.	B. Rosa.	3,000
1890.	J.-J. Thomson.	2,9956
1891.	Pellat.	3,009

La moyenne des plus récentes déterminations permet d'adopter avec une assez grande approximation, comme valeur (CGS) du coefficient V_i, le nombre

$$3.10^{10}.$$

Or, voici les valeurs (CGS) assignées par les meilleures expériences pour la vitesse de la lumière :

1876.	Helmert (1).	2,9999
1874.	Cornu (2).	3,004
1879.	Michelson (3).	2,9994
1881.	Young Forbes (4).	3,0138
1882.	Michelson (5).	2,9985
1885.	Newcomb (6).	2,9986
	Moyenne.	3,0023

La valeur $|V_i|$ *dont la valeur numérique est égale, dans un système absolu quelconque, à celle du coefficient* $|V_i|$, *est donc la* VITESSE DE LA LUMIÈRE.

Une telle coïncidence n'a point paru l'effet du hasard. Avec Maxwell, les physiciens y ont vu l'indice d'un rapport étroit entre les phénomènes électriques et les phénomènes lumineux. Ce rapport, expliqué par une théorie de Maxwell qui embrasse dans une étude unique les phénomènes électriques et lumineux comme des manifestations diverses d'un même milieu, ouvre aux recherches électriques une voie toute nouvelle, dans laquelle ont déjà été faites de nombreuses et importantes découvertes.

(1) *Astronom. Nachricht.*, LXXXVII, S. 126.
(2) *Mém. de l'Observat. de Paris*, t. XIII, p. 293.
(3) *Proc. Amer. Assoc.*, p. 124-160.
(4) *Nature*, XXIV, p. 303.
(5) *Am. Assoc. of Sc. Am. J.*, n° 193; Supplém. 13 septemb. 1879, p. 3069-73. Sill. J. (3), XVIII, p. 390-393, 1879.
(6) *Astr. Papers prepared for the use of the Amer. Ephemeris and Nautical Almanac 1885*, p. 112-230.

Art. 3. — *Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.*

Le rapport de deux unités est égal au rapport inverse des valeurs numériques d'une même grandeur rapportée successivement à chacune d'elles.

Si donc on désigne respectivement par

$$|\mathcal{Q}_s|,\quad |\mathcal{I}_s|,\quad |\mathcal{E}_s|,\quad |\mathcal{C}_s|,\quad |\mathcal{R}_s|,$$

et

$$|\mathcal{Q}_m|,\quad |\mathcal{I}_m|,\quad |\mathcal{E}_m|,\quad |\mathcal{C}_m|,\quad |\mathcal{R}_m|,$$

les unités électrostatiques et électromagnétiques de quantité d'électricité, d'intensité de courant, de force électromotrice, de capacité et de résistance, on aura :

$$\frac{|\mathcal{Q}_s|}{|\mathcal{Q}_m|} = \frac{Q_m}{Q_s} = \frac{1}{V_i},$$

$$\frac{|\mathcal{I}_s|}{|\mathcal{I}_m|} = \frac{I_m}{I_s} = \frac{1}{V_i},$$

$$\frac{|\mathcal{E}_s|}{|\mathcal{E}_m|} = \frac{E_m}{E_s} = V_i,$$

$$\frac{|\mathcal{C}_s|}{|\mathcal{C}_m|} = \frac{C_m}{C_s} = \frac{1}{V_i^2},$$

$$\frac{|\mathcal{R}_s|}{|\mathcal{R}_m|} = \frac{R_m}{R_s} = V_i^2.$$

D'une manière générale, soient $|\mathcal{G}_s|$ et $|\mathcal{G}_m|$ les unités électrostatique et électromagnétique d'une grandeur $|G|$, on aura, en vertu des relations $\frac{G_s}{G_m} = V_i^{\lambda-\lambda'} = V_i^{\tau'-\tau}$,

$$\frac{|\mathcal{G}_s|}{|\mathcal{G}_m|} = \frac{G_m}{G_s} = V^{\lambda'-\lambda} = V_i^{\tau-\tau'}.$$

Art. 4. — *Formules communes au système électrostatique et au système électromagnétique.*

Soient respectivement

$$Q_s,\quad E_s,\quad C_s,\quad I_s,\quad R_s,$$
$$Q_m,\quad E_m,\quad C_m,\quad I_m,\quad R_m,$$

les valeurs numériques d'une quantité d'électricité, d'une force électromotrice, d'une capacité, d'une intensité de courant et d'une résistance données. Les relations précédentes montrent que l'on a

$$Q_m E_m = Q_s E_s,$$
$$C_m E_m^2 = C_s E_s^2,$$
$$\frac{Q_m^2}{C_m} = \frac{Q_s^2}{C_s},$$
$$E_m I_m = E_s I_s,$$
$$R_m I_m^2 = R_s I_s^2.$$

Il suit de là que pour appliquer les formules :

$$W = \tfrac{1}{2} QE,$$
$$W = \tfrac{1}{2} CE^2,$$
$$W = \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$
$$W = EIT,$$
$$W = RI^2T,$$

c'est-à-dire pour faire le calcul d'une énergie électrique dans les différents cas qui peuvent se présenter, on peut employer aussi bien les mesures électromagnétiques des grandeurs que l'on a à prendre en considération, que leurs mesures électrostatiques. Il est bien entendu qu'il s'agit de mesures basées de part et d'autre sur les mêmes unités fondamentales géométriques et mécaniques.

CHAPITRE VIII

Influence du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques sur l'expression des grandeurs électriques et magnétiques dans les différents systèmes.

Art. 1.

Un changement de grandeur des unités fondamentales géométriques et mécaniques entraîne un changement des unités

électriques et magnétiques et par conséquent un changement de la valeur numérique d'une grandeur électrique ou magnétique déterminée.

Ces changements se déduisent très simplement des symboles de dimensions des grandeurs considérées. Les raisonnements qui ont été faits au chapitre V (livre II) s'appliquent aux grandeurs électriques et magnétiques comme aux grandeurs géométriques et mécaniques.

Si aux bases

$$|\mathfrak{X}_1|, \quad |\mathfrak{Y}_1|, \quad |\mathfrak{Z}_1|$$

on substitue les bases

$$|\mathfrak{X}_2|, \quad |\mathfrak{Y}_2|, \quad |\mathfrak{Z}_2|,$$

à une unité $|\mathfrak{G}_1|$ se trouve par ce fait substituée une unité $|\mathfrak{G}_2|$ dont le rapport à la première est

$$\frac{|\mathfrak{G}_2|}{|\mathfrak{G}_1|} = \left(\frac{|\mathfrak{X}_2|}{|\mathfrak{X}_1|}\right)^x \left(\frac{|\mathfrak{Y}_2|}{|\mathfrak{Y}_1|}\right)^y \left(\frac{|\mathfrak{Z}_2|}{|\mathfrak{Z}_1|}\right)^z,$$

x, y, z étant les exposants de dimensions de l'espèce de grandeur considérée relativement aux grandeurs

$$|\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{Y}|, \quad |\mathfrak{Z}|.$$

Si, par exemple, aux bases

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{F}|$$

on substitue les bases

$$l|\mathfrak{L}|, \quad t|\mathfrak{T}|, \quad f|\mathfrak{F}|,$$

à une unité $|\mathfrak{G}_1|$ se trouve substituée une unité $|\mathfrak{G}_2|$ $l^\lambda t^\tau f^\varphi$ *fois plus grande que la première,* d'où il suit que la valeur numérique d'une grandeur donnée de l'espèce en question devient $l^\lambda t^\tau f^\varphi$ *fois plus petite* qu'auparavant.

Si aux bases

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{M}|$$

on substitue les bases

$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad m|\mathfrak{M}|,$$

à une unité $|\mathcal{G}_1|$ se trouve substituée une unité $|\mathcal{G}_2|$ $l^\lambda t^\tau m^\mu$ *fois plus grande que la première,* et la valeur numérique d'une grandeur donnée de l'espèce considérée devient $l^\lambda t^\tau m^\mu$ *fois plus petite* qu'auparavant.

Les expressions des coefficients

$$l^\lambda t^\tau f^\varphi$$

et

$$l^\lambda t^\tau m^\mu$$

pour les diverses grandeurs électriques et magnétiques sont données par les symboles mêmes des dimensions de ces grandeurs. On n'a donc pour les écrire qu'à se reporter aux tableaux des chapitres IV et V (livre III) (¹).

Si les bases

$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad f|\mathfrak{F}|,$$
$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad m|\mathfrak{M}|$$

sont celles du système (CGS), on aura pour

$$l,\quad t,\quad f,\quad m,$$

suivant la nature du premier système, les valeurs suivantes :

	l	t	f	m
Ancien système français.	$\frac{1}{32,484}$	1	$\frac{1}{480185,6}$	$\frac{1}{14782,3}$
Ancien système anglais.	$\frac{1}{30,48021}$	1	$\frac{1}{444956,3}$	$\frac{1}{14598,1}$
Système métrique.	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{980960}$	$\frac{1}{9809,6}$
Système de Gauss.	10	1	10000	1000
1er système BA (MGS).	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{100}$	1

(¹) Voir la note VI.

Un changement des unités fondamentales affecte le paramètre V_i (voir chap. VII, liv. III) comme la valeur numérique d'une vitesse. Si donc les unités de longueur et de temps deviennent respectivement l fois et t fois plus grandes, ce paramètre devient $\frac{l}{t}$ fois plus petit. Sa valeur n'est pas affectée par un changement de l'unité de force seule ou de l'unité de masse seule.

Parmi tous les changements possibles, il convient de remarquer ceux qui le rendent égal à 1 et ceux qui le laissent invariable.

1. Soit V_i la valeur de ce paramètre dans un système ayant pour bases

$$|\mathfrak{L}|, \qquad |\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque.}$$

Il aura la valeur 1 dans tous les systèmes ayant pour bases

$$l|\mathfrak{L}|, \qquad t|\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque,}$$

si l et t sont deux nombres tels que

$$\frac{l}{t} = V_i,$$

c'est-à-dire dans tous les systèmes ayant pour bases

$$V_i n|\mathfrak{L}|, \qquad n|\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque.}$$

n étant un nombre quelconque.

Ainsi, ce paramètre ayant dans le système (CGS) la valeur

$$3.10^{10},$$

il aura la valeur 1 dans tous les systèmes ayant pour bases

$$3.10^{10}\, n \,\text{cm}, \qquad n \,\text{sec}, \qquad \text{masse quelconque,}$$

c'est-à-dire dans *tous les systèmes où la vitesse de la lumière est l'unité de vitesse.*

2. Tous les changements en nombre infini pour lesquels $l = t$ laissent invariable le paramètre V_i.

Ainsi il aura la même valeur 3.10^{10} que dans le système (CGS) dans tous les systèmes ayant pour bases

n cm, n sec, masse quelconque.

Les changements caractérisés par la relation $l = t$ et par suite par l'invariabilité du paramètre V_i, sont les seuls qui laissent intactes toutes les formules fondamentales électriques et magnétiques.

On a vu chapitre I (livre III) de quelle propriété jouissent les systèmes d'unités dans lesquels les constantes physiques des formules possèdent la même valeur. Si, dans l'un des systèmes, un certain groupe de nombres représente les valeurs des données et des résultats d'un certain problème, le même groupe de nombres représente les données et les résultats d'un problème similaire dans tout autre de ces systèmes.

Dans le système d'unités électriques et magnétiques proposé par M. Bertrand (voir chapitre VI, livre III), le paramètre V_i ne figure que dans une formule de définition :

$$I = \frac{1}{V_i} \frac{Q}{T}$$

et nullement dans les formules qui intéressent la solution pratique des problèmes relatifs aux phénomènes électriques et magnétiques. Il en résulte que, dans ce système, aucun changement de bases n'oblige à modifier les formules employées à la solution des problèmes que l'on a à considérer dans les applications de la science; et si un certain groupe de nombres représente les données et les résultats d'un problème, ce même groupe de nombres définit les données et les résultats d'un problème similaire, quelles que soient les bases des unités géométriques et mécaniques.

Art. 2. — *Application des considérations d'homogénéité et de similitude à la recherche de certaines formules.*

En électricité, de même qu'en mécanique, la considération des conditions d'homogénéité et de similitude permet souvent

de fixer *à priori* la constitution des formules devant lier entre elles des quantités données.

La démonstration classique donnée par Laplace de la proportionnabilité de l'action élémentaire électromagnétique à la raison inverse du carré de la distance du pôle à l'élément de courant en est un premier exemple.

Ampère a montré ensuite que la formule élémentaire des actions électrodynamiques pouvait donner lieu à des considérations semblables. On trouve à ce sujet, dans le célèbre *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience* [1], la note suivante :

« I. *Sur la manière de démontrer, par les quatre cas d'équilibre exposés au commencement de ce Mémoire, que la valeur de l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs est*

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

» En suivant l'ordre des transformations que j'ai successivement fait subir à cette valeur, on trouve d'abord, en vertu des deux premiers cas d'équilibre, qu'elle est

$$\frac{ii'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta')\,ds\,ds'}{r^n};$$

on déduit du troisième, entre n et k, la relation $n + 2k = 1$, et du quatrième $n = 2$, d'où $k = -\frac{1}{2}$; ce quatrième cas d'équilibre est alors celui qu'on emploie en dernier lieu à la détermination de la valeur de la force qui se développe entre deux éléments de fils conducteurs. Mais on peut suivre une autre marche en partant d'une considération dont s'est servi M. de Laplace, quand il a conclu des premières expériences de M. Biot sur l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur rectiligne indéfini, que celle qu'un élément exerce sur un des pôles de l'aimant est en raison inverse du carré de leur distance, lorsque cette distance change seule de valeur et que l'angle

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* [2], t. VI, p. 175-388.

compris entre la droite qui la mesure et la direction de l'élément reste la même. En appliquant cette considération à l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, il est aisé de voir, indépendamment de toute recherche préliminaire sur la valeur de la force qui en résulte, que cette force est aussi réciproquement proportionnelle au carré de la distance quand elle varie seule et que les angles qui déterminent la situation relative des deux éléments n'éprouvent aucun changement. En effet, d'après les considérations développées au commencement de ce Mémoire, la force dont il est ici question est nécessairement dirigée suivant la droite r et a pour valeur

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega)\, ds\, ds';$$

d'où il suit qu'en nommant α, β, γ les angles que cette droite forme avec les trois axes, ses trois composantes seront exprimées par

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\alpha\, ds\, ds',$$
$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\beta\, ds\, ds',$$
$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\gamma\, ds\, ds',$$

et les trois forces parallèles aux trois axes qui en résultent entre deux circuits par les doubles intégrales de ces expressions, i et i' étant des constantes.

» Or, il suit du quatrième cas d'équilibre, en remplaçant les trois cercles par des courbes semblables quelconques dont les dimensions homologues soient en progression géométrique continue, que ces trois forces ont des valeurs égales dans deux systèmes semblables; il faut donc que les intégrales qui les expriment soient de dimension nulle relativement à toutes les lignes qui y entrent, d'après la remarque de M. de Laplace que je viens de rappeler, et qu'il en soit par conséquent de même des différentielles dont elles se composent, en comprenant ds et ds' parmi les lignes qui y entrent, parce que le nombre de ces différentielles, quoique infini du second ordre, doit être considéré comme le même dans les deux systèmes.

» Or le produit $ds\, ds'$ est de deux dimensions; il faut donc que

$$f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\alpha, \quad f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\beta, \quad f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\gamma,$$

soient de la dimension -2; et comme les angles θ, θ', ω, α, β, γ sont exprimés par des nombres qui n'entrent pour rien dans les dimensions des valeurs des différentielles, et que $f(r, \theta, \theta' \omega)$ ne contient que la seule ligne r, il faut nécessairement que cette fonction

soit proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, en sorte que la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs est exprimée par

$$\frac{ii'\varphi(\theta, \theta', \omega)}{r^2} ds\,ds'. \text{ »}$$

M. Bertrand, qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut (chapitre IX, livre I), a su tirer des considérations d'homogénéité et de similitude de si élégantes démonstrations de mécanique, en a indiqué aussi d'intéressantes applications à des questions d'électricité. C'est ainsi qu'il démontre, par un raisonnement analogue à celui d'Ampère, la proportionnalité de l'action de deux circuits plans infiniment petits à la raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

« L'action élémentaire de deux éléments pour des circuits d'intensité donnée est proportionnelle au produit $\frac{ds\,ds'}{r^2}$; les autres facteurs ne contiennent que des lignes trigonométriques dont la valeur est la même pour les éléments homologues de deux systèmes semblables. Si l'on considère deux surfaces S_1 et S'_1 situées dans le même plan et deux autres surfaces S_2 et S'_2 formant un système géométriquement semblable à celui des deux premières, les forces homologues auront même valeur, car $\frac{ds\,ds'}{r^2}$ est de degré zéro par rapport à l'unité de longueur. Les résultantes, par conséquent, seront égales, l'accroissement de longueur des éléments compensant exactement l'accroissement de distance. En nommant K le rapport de similitude, le produit $S_2 S'_2$ est égal à $K^4 S_1 S'_1$. Si donc l'attraction des circuits S_1 et S'_1 est $G S_1 S'_1$, celle de S_2 et de S'_2, qui lui est égale, sera $\frac{G}{K^4} S_2 S'_2$. Le facteur par lequel il faut multiplier le produit des deux surfaces est donc inversement proportionnel à la quatrième puissance des dimensions.

» Si les actions mutuelles des deux éléments produisaient un couple, la force de ce couple serait la même dans les deux systèmes, mais le rapport des bras de levier serait égal au rapport de similitude. Le moment du couple serait donc multiplié par K, et si dans l'un des deux systèmes il est représenté par $S_1 S'_1 H$, S_1 et S'_1 étant les deux surfaces enfermées dans les circuits, il le sera dans l'autre par $S_2 S'_2 \frac{H}{K^3}$.

Le couple qui tend à faire tourner deux circuits infiniment petits qui agissent l'un sur l'autre est inversement proportionnel, quand il existe, au cube de la distance ([1]). »

Le premier exemple donné par M. Bertrand de ce mode de raisonnement se rapportait à l'étude élémentaire de la propagation du courant sur une ligne électrique ([2]). Voici la forme très simple donnée par M. Vaschy à la démonstration de la loi dite de *similitude* relative à ce phénomène ([3]) :

« Sur une ligne télégraphique de longueur l, de capacité C, de résistance R, on envoie le courant d'une pile de force électromotrice E (la force électromotrice est de la nature d'un potentiel). On demande quelle sera l'intensité i du courant au poste d'arrivée au temps t.

» La fonction i ne dépend que de t, l, C, R, E; on posera

$$i = f(t, l, \mathrm{C}, \mathrm{R}, \mathrm{E}),$$

f étant *à priori* une fonction inconnue de ces cinq paramètres. Mais cette relation peut s'écrire

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\varphi\left(t, l, \mathrm{E}, \mathrm{CE}^2\,\frac{t}{\mathrm{CR}}\right).$$

$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ ayant les dimensions d'une intensité, la fonction φ doit être de dimensions nulles. Les produits CR et CE^2 ayant respectivement les dimensions d'un temps T et d'une énergie W (soit dans le système électrostatique, soit dans le système électromagnétique ou dans tout autre, comme il est facile de s'en assurer), si l'on prend comme unités fondamentales L, T, W et E, on voit qu'en réalité la fonction φ est indépendante des paramètres t, l, E et CE^2, et que la fonction i se réduit à la forme

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\varphi\left(\frac{t}{\mathrm{CR}}\right).$$

. . . .

» En d'autres termes, la fonction φ, qui représente le rapport de

([1]) *Théorie mathématique de l'électricité*. Paris, Gauthier-Villars (1889), chap. X, p. 103.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 916.

([3]) *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I, préliminaires, p. 10, et t. II, chap. II, p. 46.

l'intensité variable i à la valeur finale $\frac{E}{R} = I$, ne dépend que du paramètre $\frac{t}{CR}$; de telle sorte que si l'on porte les valeurs de $\frac{t}{CR}$ en abscisses et le rapport $\frac{i}{I}$ en ordonnées, on obtient une courbe qui est la même pour toutes les lignes..... Si l'on considère deux lignes dont les éléments sont respectivement l, C, R et l', C', R', les époques t et t' auxquelles une même fraction quelconque $\frac{i}{I}$ de l'intensité finale sera atteinte seront entre elles dans le même rapport que les produits CR et C'R' :

$$\frac{t}{t'} = \frac{CR}{C'R'}.$$

» On regarde quelquefois $\frac{t}{t'}$ comme représentant le rapport des durées des périodes variables sur les deux lignes. On dira donc, dans ce sens, que la durée de la période variable sur diverses lignes est proportionnelle à la capacité et à la résistance par unité de longueur et au carré de la longueur du circuit. C'est la loi de similitude énoncée par sir W. Thomson en 1856 et qui s'applique assez bien aux longs câbles sous-marins. »

Suivant le mode de raisonnement d'Ampère et de M. Bertrand, M. Marcel Desprez a établi d'intéressantes propositions relatives aux machines électriques [1].

Art. 3. — *Calculs symboliques.*

Les précieux avantages du mode de représentation symbolique des grandeurs exposé au chapitre VI, livre I, en recommandent tout naturellement l'usage dans les questions de changements d'unités relatives aux grandeurs électriques et magnétiques. Les règles établies à propos des grandeurs géométriques et mécaniques sont applicables, sans modification aucune, aux grandeurs électriques et magnétiques.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIV (1882), p. 431.

La question suivante donnera une idée de l'utilité et de la commodité de l'emploi de ce symbolisme :

Étant données, par leurs valeurs numériques u, v, w dans un système absolu déterminé, trois grandeurs électriques ou mécaniques $|\mathfrak{U}|$, $|\mathfrak{V}|$, $|\mathfrak{W}|$, reconnaître si elles peuvent servir de bases à la définition d'un système de mesures absolues du même type que celui dans lequel elles sont évaluées et trouver les bases de ce système.

Soient

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|$$

les bases du système dans lequel sont évaluées les grandeurs proposées. Ces dernières peuvent être représentées par les symboles

$$|\mathfrak{U}| = u\,|X|^{x_1}\,|Y|^{y_1}\,|Z|^{z_1},$$
$$|\mathfrak{V}| = v\,|X|^{x_2}\,|Y|^{y_2}\,|Z|^{z_2},$$
$$|\mathfrak{W}| = w\,|X|^{x_3}\,|Y|^{y_3}\,|Z|^{z_3}.$$

Mais si les grandeurs $|\mathfrak{U}|$, $|\mathfrak{V}|$, $|\mathfrak{W}|$ peuvent être regardées comme faisant partie d'un système absolu du même type que le premier et de bases

$$|\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{Y}|, \quad |\mathfrak{Z}|,$$

elles peuvent être représentées par les symboles

$$|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{X}|^{x_1}\,|\mathfrak{Y}|^{y_1}\,|\mathfrak{Z}|^{z_1},$$
$$|\mathfrak{V}| = |\mathfrak{X}|^{x_2}\,|\mathfrak{Y}|^{y_2}\,|\mathfrak{Z}|^{z_2},$$
$$|\mathfrak{W}| = |\mathfrak{X}|^{x_3}\,|\mathfrak{Y}|^{y_3}\,|\mathfrak{Z}|^{z_3}.$$

Donc pour que les grandeurs données puissent définir un système absolu du type proposé, il faut et il suffit que les équations symboliques

$$|\mathfrak{X}|^{x_1}\,|\mathfrak{Y}|^{y_1}\,|\mathfrak{Z}|^{z_1} = u\,|X|^{x_1}\,|Y|^{y_1}\,|Z|^{z_1},$$
$$|\mathfrak{X}|^{x_2}\,|\mathfrak{Y}|^{y_2}\,|\mathfrak{Z}|^{z_2} = v\,|X|^{x_2}\,|Y|^{y_2}\,|Z|^{z_2},$$
$$|\mathfrak{X}|^{x_3}\,|\mathfrak{Y}|^{y_3}\,|\mathfrak{Z}|^{z_3} = w\,|X|^{x_3}\,|Y|^{y_3}\,|Z|^{z_3},$$

soient compatibles et capables de fournir un système de valeurs des rapports

$$\frac{|\mathfrak{X}|}{|X|}, \quad \frac{|\mathfrak{Y}|}{|Y|}, \quad \frac{|\mathfrak{Z}|}{|Z|}.$$

On peut voir ainsi qu'une résistance $|\mathfrak{R}|$, une force électromotrice $|\mathcal{E}|$ et un temps $|\mathfrak{T}|$ peuvent servir de bases à la définition d'un système d'unités absolues, du type (LTM), en ce qui concerne les grandeurs géométriques et mécaniques, et du type électromagnétique en ce qui concerne les grandeurs électriques et magnétiques.

En effet, soient t, e, t les valeurs absolues (CGS) des trois grandeurs en question. On a, en supposant qu'elles fassent partie d'un système d'unités absolues de bases,

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{M}|,$$

les équations symboliques

$$|\mathfrak{R}| = \frac{|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|} = r\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$$|\mathcal{E}| = \frac{|\mathfrak{M}|^{\frac{1}{2}}\,|\mathfrak{L}|^{\frac{3}{2}}}{|\mathfrak{T}|^{2}} = e\,\frac{(\text{grm})^{\frac{1}{2}}(\text{cm})^{\frac{3}{2}}}{(\text{sec})^{2}},$$

$$|\mathfrak{T}| = |\mathfrak{T}| = t\,\text{sec},$$

d'où l'on tire

$$|\mathfrak{L}| = rt\,\text{cm},$$

$$|\mathfrak{T}| = t\,\text{sec},$$

$$|\mathfrak{M}| = \frac{e^{2}t}{r^{3}}\,\text{grm}.$$

CHAPITRE IX

Définition des systèmes d'unités électriques et magnétiques adoptés dans les recherches scientifiques.

Art. 1.

La mesure absolue de l'intensité du champ magnétique terrestre par la méthode de Gauss repose uniquement sur des mesures de longueurs, de temps et de masses. Pour appliquer cette méthode, Gauss et Weber avaient adopté comme unités fondamentales le *millimètre*, la *seconde*, le *milligramme-masse* ([1]). Ces unités étaient d'une grandeur parfaitement appropriée à l'objet pour lequel elles avaient été choisies, car

([1]) *Intensitas vis magneticae terrestris*, etc., p. 23. (Voir aussi note VI.)

il en résultait pour la valeur numérique de la composante horizontale du champ magnétique terrestre au lieu où avaient été faites les observations de Gauss et Weber, la valeur : 1,7 environ.

La substitution du mètre au millimètre et du gramme au milligramme eût d'ailleurs conduit à la même valeur, car les dimensions électromagnétiques d'un champ magnétique étant :

$$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}},$$

si l'on rend l'unité de masse et l'unité de longueur le même nombre de fois plus grandes ou plus petites, l'unité de champ magnétique n'est pas modifiée (1).

Weber conserva tout naturellement pour ses mesures électriques absolues (2) les unités fondamentales à l'aide desquelles avait été obtenue la mesure du champ magnétique terrestre, dont il avait d'ailleurs à se servir (3).

On peut caractériser les unités adoptées par Gauss et Weber en disant que ce sont des unités électromagnétiques normales dérivant des unités fondamentales, millimètre, seconde, milligramme-masse.

L'idée d'évaluer les grandeurs électriques en unités absolues fut, dès l'année même où parut le premier mémoire de Weber (1851), adoptée et mise en pratique par Sir W. Thomson, qui, toutefois, prit pour unités fondamentales les unités anglaises (4).

Après avoir réclamé pendant dix ans l'emploi d'unités absolues pour les mesures relatives, soit aux recherches purement scientifiques, soit aux opérations de la télégraphie, Sir W. Thomsom obtient enfin, en 1861, la nomination par

(1) Voir la note VI.

(2) Voir la note VI.

(3) *Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse* (*Pogg. Ann.*, t. LXXXII, mars 1851).

(4) *On the mechanical Theory of Electrolysis* (*Philos. Mag.*, déc. 1851).

Applications of the principle of mechanical effect to the measurement of electromotive forces, and of galvanic resistances in absolutes units (*Philos. Mag.*, déc. 1851).

l'Association britannique pour l'avancement des sciences d'une Commission spécialement chargée de l'établissement d'un système d'unités électriques.

Cette Commission adopta pour ses mesures le système électromagnétique et prit d'abord pour unités fondamentales le *mètre,* la *seconde* et le *gramme-masse,* auxquelles elle substitua ensuite (1873) le *centimètre,* la *seconde* et le *gramme-masse.* Voici, au sujet de ce choix des unités fondamentales, les termes mêmes du rapport présenté par la Commission [1] :

« Sur la question première d'unités particulières de masse, de longueur et de temps à recommander comme base de tout le système, une discussion prolongée s'est engagée, principalement sur l'adoption du gramme du *mètre* et de la seconde, ou du gramme du *centimètre* et de la seconde, la première combinaison ayant pour elle la simplicité du mot *mètre,* et la seconde ayant l'avantage de rendre l'unité de masse pratiquement identique à la masse de l'unité de volume d'eau, de rendre, en d'autres termes, la valeur de la densité de l'eau pratiquement égale à l'unité.

» Nous sommes maintenant presque unanimes à considérer ce dernier élément de simplicité comme le plus important des deux; à l'appui de cette manière de voir, nous invoquerons l'autorité de sir W. Thomson qui, depuis longtemps, a très fortement insisté sur la nécessité d'employer des unités remplissant cette condition.

» En conséquence, nous recommandons l'adoption générale du *centimètre,* du *gramme* et de la *seconde* pour les trois unités fondamentales; et, en attendant que l'on donne des noms spéciaux aux unités électriques et magnétiques qui en dérivent, nous recommandons de les distinguer des unités *absolues* d'autre provenance, en les faisant suivre de lettres C. G. S., initiales des noms des trois unités fondamentales [2]. »

Cette proposition de la Commission de l'Association britannique a été sanctionnée par le Congrès des Électriciens tenu à Paris en 1881 (séance du 19 septembre) et a été depuis cette époque universellement adoptée.

Au lieu d'un système unique d'unités électriques définies

---

[1] La Commission était composée de sir W. Thomson, G.-C. Foster, J.-C. Maxwell, G.-J. Stoney, Flaming Jenkin, Siemens, F.-J. Bramwell, Everett, rapporteur.

[2] *Unités et constantes physiques,* par Everett. — Trad. Raynaud. — Appendice,

à l'aide des unités fondamentales (CGS), on emploie généralement deux systèmes partiels fondés sur les mêmes bases.

Pour les calculs relatifs à l'électrostatique, on emploie des unités dérivant des unités (CGS) suivant le système électrostatique. On a vu en effet que ce système est celui qui donne aux formules électrostatiques leur forme la plus simple.

Pour les calculs relatifs au magnétisme, à l'électromagnétisme et à l'électrodynamique, on fait usage d'unités dérivant des unités (CGS) suivant le système électromagnétique, car c'est dans ce dernier système que les formules magnétiques, électromagnétiques et électrodynamiques se présentent sous la forme la plus simple.

Les unités électriques usitées actuellement dans les recherches scientifiques sont donc soit les ***unités électrostatiques*** (CGS), soit les ***unités électromagnétiques*** (CGS).

Le passage d'un système à l'autre s'effectue aisément à l'aide de la valeur (CGS) du coefficient V_i qui est :

$$3.\,10^{10}.$$

Art. 2. — *Principales unités du système électrostatique* (CGS).

Unité de quantité d'électricité. — L'unité de quantité d'électricité est la quantité exerçant sur une quantité égale placée dans le vide à un centimètre de la première une répulsion égale à une dyne.

Unité de capacité. — L'unité de capacité est égale à la capacité d'une sphère isolée d'un centimètre de rayon.

La capacité électrostatique (CGS) de la Terre supposée sphérique est donc représentée par le nombre :

637110400.

Unité de potentiel. — L'unité de potentiel est égale au potentiel d'une sphère isolée d'un centimètre de rayon possédant une charge égale à l'unité de quantité.

D'après sir W. Thomson, la différence de potentiel entre deux

plateaux donnant une étincelle de $0^c,1$ dans l'air vaut en unités électrostatiques (CGS)

14,7.

Suivant le même physicien, la valeur électrostatique (CGS) de la force électromotrice d'un élément Daniell est représentée par le nombre :

0,00374.

ART. 3. — *Principales unités du système électromagnétique* (CGS).

Unité de masse magnétique. — L'unité de masse magnétique est la masse exerçant sur une masse égale placée dans le vide à un centimètre de la première une répulsion égale à une dyne.

Unité de champ magnétique. — L'unité de champ magnétique est égale au champ que créerait une masse magnétique égale à l'unité en un point distant de cette masse d'une longueur égale à un centimètre.

La valeur numérique (CGS) de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à Paris (Parc Saint-Maur) au 1er janvier 1891 est [1] :

0,19554.

L'inclinaison ayant la valeur

$65°10',6$

la valeur numérique du champ total au même lieu est :

0,46576.

Unité d'intensité de courant. — L'unité d'intensité de courant est l'intensité d'un courant qui, ayant pour siège un conducteur rectiligne indéfini, créerait un champ magnétique ayant en un point situé à un centimètre du conducteur une valeur numérique égale à 2.

Un courant d'intensité égale à l'unité électromagnétique (CGS)

---

[1] Th. Moureaux, *Sur la valeur absolue des éléments magnétiques au 1er janvier 1891* (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 5 janvier 1891).

dégage en une seconde dans un voltamètre une masse d'argent égale à

$$11^{mgr},192$$

ou une masse d'hydrogène égale à

$$0^{mgr},103696$$

dont le volume dans les conditions normales est :

$$1^{cm^3},1623.$$

Unité de résistance. — L'unité de résistance peut être définie comme égale à la résistance d'un conducteur dans lequel un courant ayant une intensité égale à l'unité dégagerait en une seconde uue quantité d'énergie égale à un erg, c'est-à-dire une quantité de chaleur égale à la fraction :

$$\frac{1}{41612323}$$

d'une petite calorie.

Cette résistance est à peu près celle de $\frac{1}{20000}$ de millimètre d'un fil de cuivre ayant un millimètre de diamètre, ou de $\frac{1}{120000}$ de millimètre d'un fil de fer de ce même diamètre.

Unité de force électromotrice. — L'unité de force électromotrice est égale à la différence de potentiel existant aux deux extrémités d'un conducteur de résistance égale à l'unité parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité.

Cette différence de potentiel est à peu près la fraction :

$$\frac{1}{112\,200\,000}$$

de celle qui existe entre les deux pôles d'une pile de Daniell.

Art. 4. — *Rapport des unités correspondantes des deux systèmes.*

Le coefficient V_i ayant en mesure (CGS) la valeur :

$$3.10^{10},$$

on a (voir chapitre VII, livre III)

$$|\mathfrak{Q}_m|_{(CGS)} = 3.10^{10}\,|\mathfrak{Q}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathfrak{J}_m|_{(CGS)} = 3.10^{10}\,|\mathfrak{J}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{E}_m|_{(CGS)} = \frac{1}{3.10^{10}}\,|\mathcal{E}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{C}_m|_{(CGS)} = 9.10^{20}\,|\mathcal{C}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathfrak{R}_m|_{(CGS)} = \frac{1}{9.10^{20}}\,|\mathfrak{R}_s|_{(CGS)}.$$

On voit que l'unité électromagnétique (CGS) de quantité d'électricité est telle qu'elle exercerait, en vertu de la loi de Coulomb, sur une quantité égale placée à un kilomètre de distance une action égale à :

$$\frac{(3.10^{10})^2}{(10^5)^2}\ \text{dynes,}$$

c'est-à-dire à

90000 kg.

environ.

L'unité électromagnétique CGS de capacité est égale à la capacité d'une sphère isolée d'un rayon égal à

$$9\,.\,10^{20}\ \text{cm.}$$

ou environ

60 millions de fois

la distance moyenne du soleil à la terre.

CHAPITRE X

Définition du système d'unités électriques et magnétiques adopté dans la pratique industrielle.

Art. 1. — *Système d'unités pratiques de l'Association britannique.*

Les applications industrielles de l'électricité se rapportant principalement aux courants et à leurs différents effets, le système d'unités qui s'offre comme le plus avantageux pour les mesures et les calculs auxquels donnent lieu ces applications

est le système électromagnétique, grâce auquel les formules magnétiques, électromagnétiques, électrodynamiques, dont l'usage est le plus fréquent, sont réduites au maximum de simplicité. Aussi, adoptant sur ce point l'opinion de l'Association britannique, le Congrès des électriciens tenu à Paris en 1881 a-t-il décidé que dans la pratique industrielle il serait fait usage exclusivement d'unités de ce système.

En raison de la disproportion considérable existant entre certaines unités du système électromagnétique (CGS), telles que l'unité de résistance, l'unité de force électromotrice (voir le chapitre précédent) et les grandeurs de l'ordre de celles qui s'offrent le plus habituellement aux mesures, l'Association britannique avait proposé comme unités secondaires pratiques certains multiples de ces unités (CGS) choisis de façon à représenter des grandeurs de même ordre que les étalons arbitraires dont les praticiens, et notamment les télégraphistes, avaient trouvé l'emploi avantageux.

Les principales unités arbitraires de résistance en usage à l'époque où l'Association britannique commença ses travaux étaient :

L'*unité Wheatstone*, c'est-à-dire la résistance du pied anglais d'un fil de cuivre pesant 100 grains par pied de longueur;

L'*unité Varley*, c'est-à-dire la résistance d'un pied anglais d'un fil de cuivre de $\frac{1}{16}$ de pouce de diamètre;

L'*unité télégraphique française*, c'est-à-dire la résistance d'un kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre;

L'*unité Siemens*, c'est-à-dire la résistance à 0° d'une colonne de mercure ayant un millimètre carré de section et un mètre de longueur.

L'indication du diamètre et de la longueur d'un conducteur métallique autre que le mercure ne suffit pas pour définir une résistance, car la résistance spécifique d'une substance est variable d'un échantillon à l'autre, et, pour un même échantillon, elle dépend de la température. De toutes les résistances qui viennent d'être énumérées, la seule qui fût bien définie

était l'unité Siemens. Relativement à cette dernière, les autres avaient approximativement les valeurs suivantes :

NOMS DES UNITÉS.	VALEURS EN UNITÉS SIEMENS.
Unité Wheatstone.	$\frac{1}{80}$
Unité Warley.	.25
Unité française.	10

D'après les mesures absolues de Weber, on pouvait calculer que le multiple décimal de l'unité de résistance électromagnétique (CGS) approchant le plus de l'unité Siemens était :

$$10^9\,(\mathcal{R}_m)_{\text{CGS}}.$$

C'est ce multiple que l'Association britannique choisit pour en faire une unité pratique, à laquelle elle donna le nom d'*ohm* [1].

La force électromotrice la plus communément employée comme terme de comparaison dans les mesures pratiques était la force électromotrice du couple Daniell. Le multiple décimal de l'unité électromagnétique (CGS) de force électromotrice le plus voisin de celle-là et aussi de celle du couple de Volta étant

$$10^8\,(\mathcal{E}_m)_{\text{CGS}},$$

l'Association britannique en fit une unité pratique sous le nom de *volt*.

Pour conserver dans les calculs pratiques les formules simples :

$$I = \frac{E}{R},$$
$$Q = IT,$$
$$Q = CV,$$
$$W = RI^2T,$$

---

[1] Ce fut sur la proposition de Ch. Bright et de Latimer Clark que l'Association britannique proposa de distinguer les unités pratiques par des noms rappelant ceux des physiciens illustres dont les travaux avaient principalement porté sur les grandeurs électriques ou magnétiques correspondantes.

il faut joindre à l'ohm et au volt des unités d'intensité, de quantité, de capacité, de travail convenablement choisies.

Le quotient de la valeur numérique en volts de la force électromotrice existant dans un circuit par la valeur numérique en ohms de la résistance, ne représente la valeur numérique de l'intensité du courant que si l'intensité prise pour unité est celle du courant produit par un volt dans un circuit de résistance égale à un ohm.

Le produit de la valeur numérique pratique de l'intensité d'un courant par la valeur numérique d'un temps ne représente la valeur numérique de la quantité d'électricité transportée par ce courant pendant ce temps que si la quantité prise pour unité est celle que transporte pendant l'unité de temps un courant ayant une intensité égale à l'unité pratique.

Le produit de la valeur numérique en volts de la différence de potentiel existant entre les armatures d'un condensateur par la valeur numérique de la capacité de ce dernier, ne représente la valeur numérique pratique de la charge que si la capacité prise pour unité est celle d'un condensateur dans lequel une charge égale à l'unité pratique de quantité établit une différence de potentiel d'un volt.

Le produit de la valeur numérique pratique de la résistance d'un conducteur par le carré de la valeur numérique pratique de l'intensité du courant dont il est le siège et par la valeur numérique d'un temps, ne représente la valeur numérique de l'énergie dégagée dans ce conducteur pendant ce temps que si l'énergie prise pour unité est celle que dégage, pendant l'unité de temps, dans un conducteur ayant une résistance d'un ohm, un courant d'intensité égale à l'unité pratique.

On peut ainsi, en prenant pour bases l'ohm, le volt et la seconde, définir de proche en proche un système complet d'unités géométriques, mécaniques, électriques et magnétiques dans lequel, en raison des formules adoptées, les relations entre les diverses unités sont les mêmes que dans le système électromagnétique (CGS).

C'est ce système que l'Association britannique a proposé comme système pratique.

On peut l'envisager comme un système électromagnétique absolu ayant pour bases :

Une certaine longueur $|\mathcal{L}|$,
La seconde,
Une certaine masse $|\mathcal{M}|$.

Il est facile de trouver (voir chapitre VIII, livre III) les valeurs numériques (CGS) de la longueur $|\mathcal{L}|$ et de la masse $|\mathcal{M}|$. — L'unité de résistance du système est représentée symboliquement par l'expression

$$\frac{|\mathcal{L}|}{\text{sec}}.$$

Mais on sait par définition qu'elle vaut 10^9 unités (CGS). On a donc l'équation symbolique

$$\frac{|\mathcal{L}|}{\text{sec}} = 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

d'où l'on déduit

$$|\mathcal{L}| = 10^9 \text{ cm}.$$

D'autre part, l'unité de force électromotrice, représentée symboliquement par

$$\frac{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}} |\mathcal{L}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2},$$

vaut 10^8 unités (CGS) ; on a donc l'équation symbolique

$$\frac{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}} |\mathcal{L}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2} = 10^8 \frac{|\text{grm}|^{\frac{1}{2}} |\text{cm}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2},$$

d'où l'on déduit

$$|\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}} = 10^8 |\text{grm}|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{cm}}{|\mathcal{L}|}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou, en tenant compte de la valeur de $|\mathcal{L}|$,

$$\mathcal{M} = 10^{-11} \text{ grm}.$$

Le système pratique a donc pour bases les grandeurs suivantes :

$$10^9\ \text{cm}, \qquad \text{sec}, \qquad 10^{-11}\ \text{grm},$$

si on le rapporte au type (LTM), ou

$$10^9\ \text{cm}, \qquad \text{sec}, \qquad 10^{-2}\ \text{dyne},$$

si on le rapporte au type (LTF).

La connaissance de ces bases permettra de trouver aisément, à l'aide des symboles de dimensions, la valeur (CGS) d'une unité pratique quelconque.

Par exemple, soit à trouver la valeur en ergs de l'unité pratique de travail. On écrira l'équation symbolique :

$$|\mathfrak{M}|\ |\mathfrak{L}|^2\ |\text{sec}|^{-2} = x\ |\text{gr}|\ |\text{cm}|^2|\ |\text{sec}|^{-2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{|\mathfrak{M}|}{\text{gr}}\right)\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{sec}}\right)^2 = 10^{-11}\,10^{18} = 10^7;$$

donc, *unité prat. de travail* $= 10^7$ ergs.

D'une manière générale, soient $|\mathcal{G}|$ et $|\mathcal{G}_m|$ l'unité pratique et l'unité électromagnétique (CGS) d'une grandeur quelconque dont le symbole de dimensions électromagnétiques est

$$L^{\lambda'}\ T^{\tau'}\ F^{\varphi'}.$$

On a

$$|\mathcal{G}| = (10^9)^{\lambda'}\ (10^{-2})^{\varphi'}\ |\mathcal{G}_m|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 10^{9\lambda'-2\varphi'}\ |\mathcal{G}_m|,$$

et par suite, en se reportant à la relation générale entre $|\mathcal{G}_m|$ et $|\mathcal{G}_e|$:

$$|\mathcal{G}| = V_i^{\lambda-\lambda'}\ 10^{9\lambda-2\varphi'}\ |\mathcal{G}_e|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 3^{\lambda-\lambda'}\ 10^{10\lambda-2\varphi'-\lambda'}\ |\mathcal{G}_e|.$$

Art. 2. — *Nomenclature des principales unités pratiques.*

Le Congrès international des électriciens, réuni à Paris en 1881, a sanctionné le système d'unités établi par l'Association britannique en votant à l'unanimité les résolutions suivantes :

« 1° *On adoptera pour les mesures électriques les unités fondamentales : centimètre, masse du gramme, seconde* (CGS) ;

» 2° *Les unités pratiques l'*OHM *et le* VOLT *conserveront leurs définitions actuelles :* 10^9 *pour l'ohm et* 10^8 *pour le volt ;*

» 3° *L'unité de résistance (ohm) sera représentée par une colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade ;*

» 4° *Une Commission internationale sera chargée de déterminer, par de nouvelles expériences, pour la pratique, la longueur de la colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade, qui représentera la valeur de l'ohm ;*

» 5° *On appelle* AMPÈRE *le courant produit par un volt dans un ohm ;*

» 6° *On appelle* COULOMB *la quantité d'électricité définie par la condition qu'un ampère donne un coulomb par seconde ;*

» 7° *On appelle* FARAD *la capacité définie par la condition qu'un coulomb dans un farad donne un volt.* »

La nomenclature des unités pratiques a été complétée au deuxième Congrès international des électriciens tenu à Paris en 1889 par les résolutions suivantes :

« *L'unité pratique de travail est le* JOULE. *Le joule vaut* 10^7 *unités CGS de travail. C'est l'énergie équivalente à la chaleur dégagée pendant une seconde par un ampère dans un ohm.*

» *L'unité pratique de puissance est le* WATT. *C'est la puissance d'un joule par seconde. Le watt vaut* 10^7 *unités CGS.*

» *Le Congrès exprime le vœu que dans la pratique industrielle on exprime la puissance des machines en kilowatts, au lieu de l'exprimer en chevaux-vapeur.*

» *L'unité pratique de coefficient d'induction est le* QUADRANT. *Le quadrant vaut* 10^9 *centimètres.* »

Dans l'évaluation pratique des grandeurs électriques, il est, dans certains cas, nécessaire, pour éviter les trop grands nombres, d'avoir recours à des unités secondaires formées de multiples ou de sous-multiples des unités principales. Voici le tableau des multiples et sous-multiples généralement adoptés :

		RÉSISTANCES.	FORCES ÉLECTROMOTRICES.
million	= mega	Megohm : Mω	Megavolt : Mv
mille	= kilo	kilohm : $k\omega$	kilovolt : kv
millième	= milli	milliohm : $m\omega$	millivolt : mv
millionième	= micro	microhm : $\mu\omega$	microvolt : μv

INTENSITÉS DE COURANT.	QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ.	CAPACITÉS.
Megampère : Ma	Megacoulomb : Mc	Megafarad : Mf
kiloampère : ka	kilocoulomb : kc	kilofarad : kf
milliampère : ma	millicoulomb : mc	millifarad : mf
microampère : μa	microcoulomb : μc	microfarad : μf

Art. 3. — *Représentation des principales unités pratiques.*

1. Unité de résistance. — Ohm.

Des mesures absolues de résistance faites en 1863-1864 à King's-Collège par Clark Maxwell, Flaming Jenkin et Balfour Stewart, suivant une méthode due à sir W. Thomson, l'Association britannique avait conclu que l'*ohm* pouvait être représenté par la résistance à 0° d'une colonne de mercure ayant une section d'un millimètre carré et une longueur égale à

$$104^{cm},83.$$

Mais toutes les expériences faites ensuite par de nombreux observateurs indiquèrent que ce nombre devait être trop faible de plus d'un centimètre. C'est pourquoi le Congrès des électriciens de 1881 émit le vœu que des expériences décisives fussent faites à ce sujet.

En 1884, la Conférence internationale des unités électriques se trouvait en possession des résultats suivants :

DATES.	OBSERVATEURS.	RÉSULTATS.	MÉTHODES EMPLOYÉES.
1881	Rayleigh et Schuster.	105,98	British Association.
1882	Rayleigh.	106,28	British Association.
1882	H. Weber.	106,14	British Association.

1874	Kohlrausch.	105,91	Weber (Induction par la terre).
1884	Mascart.	106,33	
1884	Wiedemann.	106,19	
1878	Rowland.	105,79	Induction voltaïque.
1882	Glazebrook.	106,30	
1884	Mascart.	106,33	
1884	Fr. Weber.	105,33	
1884	Roiti.	105,90	
1873	Lorenz.	107,10	Lorenz.
1884	Lorenz.	106,19	
1883	Rayleigh.	106,24	
1884	Lenz.	106,13	
1882	Dorn.	105,46	Weber (Amortissement).
1883	Wild.	105,68	
1884	Fr. Weber.	105,26	
1866	Joule.	106,23	Joule.
	Moyenne.	106,04	

Une sous-commission, composée en grande partie des différents expérimentateurs présents à la Conférence, discuta ces résultats et formula les conclusions suivantes :

« La sous-commission a examiné les différents travaux relatifs à la détermination de l'ohm, en les classant soit par ordre de date, soit d'après les méthodes d'observation. Il eût été sans doute très utile de discuter la valeur des méthodes et les détails des expériences; mais on n'a pas tardé à reconnaître que cette discussion présentait les plus grandes difficultés si l'on voulait aboutir à rallier tous les suffrages.

» Il s'est trouvé que la moyenne des résultats classés de diverses manières était voisine de 106^{cm}.

» La sous-commission s'est arrêtée à cette valeur, non pas à cause du résultat moyen des observations, ni parce qu'elle la considérait comme la plus probable, mais surtout parce que les trois premiers chiffres qui représentent la longueur de la colonne mercurielle sont acceptés par tout le monde et paraissent avoir toutes les garanties d'exactitude. Quelques membres pensaient que ce nombre est trop élevé; plusieurs autres étaient d'avis qu'il est sensiblement trop bas, mais sans pouvoir donner de leur opinion une preuve tout à fait démonstrative. Dans tous les cas, l'erreur commise est sûrement

faible, de quelques unités seulement du quatrième chiffre et sans importance pour la pratique. La nécessité de donner à l'industrie une solution qu'elle réclame avec quelque impatience a paru assez grave pour qu'on ne crût pas devoir la retarder davantage. Les recherches scientifiques absolues ne seront en aucune façon compromises par la différence qui existe entre la valeur théorique de l'ohm et le chiffre admis par l'unité pratique [1]. »

En conséquence, sur la proposition de la sous-commission, la Conférence adopta, à l'unanimité, la résolution suivante [2] :

L'ohm légal est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur à la température de la glace fondante.

D'après les meilleures expériences faites depuis 1884, la longueur de la colonne de mercure représentative de l'ohm semble pouvoir être fixée à

$$106^{cm},3$$

avec une erreur probablement inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Voici, en effet, les résultats des plus récentes déterminations :

1887	Rowland [3].	106,32
	Kohlrausch [4].	106,32
1888	Dorn [5],	106,24
1888	Wuilleumier [6].	106,27

Pour passer de l'unité Siemens à l'ohm légal, on fera usage de la relation

$$\text{U.S} = \frac{1}{1,06} \text{ ohm légal.}$$

---

(1) Extrait du rapport présenté à la seconde séance de la Conférence internationale des unités électriques, par M. Mascart, président et rapporteur de la sous-commission.

(2) Séance du 3 mai 1884.

(3) Communication à l'Association britannique à Manchester.

(4) *Abhandl. der k. bayer. Akad. der Wissensch.*, IIe classe, vol. 16.

(5) *Ac. des Sc. de Berlin*, 1888.

(6) *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 1888.

Pour passer de l'unité de l'Association britannique à l'ohm légal, le Comité de cette Association a adopté la relation

$$U.S = 0{,}95412\ B.A.U,$$

résultant des expériences de lord Rayleigh et Mrs. Sidgwick [1], d'où l'on déduit

$$0{,}95412\ B.A.U = \frac{1}{1{,}06}\ \text{ohm légal.}$$

D'après Glazebrook et Fitzpatrick [2], on aurait plus exactement

$$U.S = 0{,}95352\ B.A.U,$$

d'où

$$0{,}95352\ B.A.U = \frac{1}{1{,}06}\ \text{ohm légal.}$$

2. Unité de force électromotrice. — Volt.

Le volt étant égal à

$$10^8\ |\mathcal{E}_m|_{CGS}$$

vaut

$$10^8\ \frac{|\mathcal{E}_s|_{CGS}}{3.10^{10}}$$

ou

$$\frac{1}{300}\ |\mathcal{E}_s|_{CGS}.$$

L'unité électrostatique (CGS) de force électromotrice vaut donc

300 volts.

La différence de potentiel capable de produire entre deux plateaux une étincelle de $0^c{,}1$ étant égale à $14{,}7\ |\mathcal{E}_s|_{CGS}$, vaut, par suite,

4410 volts.

Ainsi que le montre le tableau suivant, le volt est une force

(1) *Phil. Trans.*, 1883.
(2) *Phil. Trans.*, 1888.

faible, de quelques unités seulement du quatrième chiffre et sans importance pour la pratique. La nécessité de donner à l'industrie une solution qu'elle réclame avec quelque impatience a paru assez grave pour qu'on ne crût pas devoir la retarder davantage. Les recherches scientifiques absolues ne seront en aucune façon compromises par la différence qui existe entre la valeur théorique de l'ohm et le chiffre admis par l'unité pratique [1]. »

En conséquence, sur la proposition de la sous-commission, la Conférence adopta, à l'unanimité, la résolution suivante [2] :

L'ohm légal est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur à la température de la glace fondante.

D'après les meilleures expériences faites depuis 1884, la longueur de la colonne de mercure représentative de l'ohm semble pouvoir être fixée à

$$106^{cm},3$$

avec une erreur probablement inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Voici, en effet, les résultats des plus récentes déterminations :

1887	Rowland [3].	106,32
	Kohlrausch [4].	106,32
1888	Dorn [5],	106,24
1888	Wuilleumier [6].	106,27

Pour passer de l'unité Siemens à l'ohm légal, on fera usage de la relation

$$\text{U.S} = \frac{1}{1,06} \text{ ohm légal.}$$

[1] Extrait du rapport présenté à la seconde séance de la Conférence internationale des unités électriques, par M. Mascart, président et rapporteur de la sous-commission.

[2] Séance du 3 mai 1884.

[3] Communication à l'Association britannique à Manchester.

[4] *Abhandl. der k. bayer. Akad. der Wissensch.*, IIe classe, vol. 16.

[5] *Ac. des Sc. de Berlin*, 1888.

[6] *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 1888.





Pour passer de l'unité de l'Association britannique à l'ohm légal, le Comité de cette Association a adopté la relation

$$\text{U.S} = 0{,}95412 \text{ B.A.U},$$

résultant des expériences de lord Rayleigh et Mrs. Sidgwick (¹), d'où l'on déduit

$$0{,}95412 \text{ B.A.U} = \frac{1}{1{,}06} \text{ ohm légal}.$$

D'après Glazebrook et Fitzpatrick (²), on aurait plus exactement

$$\text{U.S} = 0{,}95352 \text{ B.A.U},$$

d'où

$$0{,}95352 \text{ B.A.U} = \frac{1}{1{,}06} \text{ ohm légal}.$$

2. Unité de force électromotrice. — Sol.

Le volt étant égal à

$$10^8 \, |\mathcal{E}_m|_{\text{CGS}}$$

vaut

$$10^8 \, \frac{|\mathcal{E}_s|_{\text{CGS}}}{3.10^{10}}$$

ou

$$\frac{1}{300} \, |\mathcal{E}_s|_{\text{CGS}}.$$

L'unité électrostatique (CGS) de force électromotrice vaut donc

$$300 \text{ volts}.$$

La différence de potentiel capable de [illegible] une étincelle de $0^c{,}1$ étant égale à 14,7 [illegible]

$$4410 \text{ volts}.$$

Ainsi que le montre le tableau [illegible]

(¹) *Phil. Trans.*, 1883.
(²) *Phil. Trans.*, 1888.

faible, de quelques unités seulement du quatrième chiffre et sans importance pour la pratique. La nécessité de donner à l'industrie une solution qu'elle réclame avec quelque impatience a paru assez grave pour qu'on ne crût pas devoir la retarder davantage. Les recherches scientifiques absolues ne seront en aucune façon compromises par la différence qui existe entre la valeur théorique de l'ohm et le chiffre admis par l'unité pratique [1]. »

En conséquence, sur la proposition de la sous-commission, la Conférence adopta, à l'unanimité, la résolution suivante [2] :

L'ohm légal est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur à la température de la glace fondante.

D'après les meilleures expériences faites depuis 1884, la longueur de la colonne de mercure représentative de l'ohm semble pouvoir être fixée à

$$106^{cm},3$$

avec une erreur probablement inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Voici, en effet, les résultats des plus récentes déterminations :

1887	Rowland [3].	106,32
	Kohlrausch [4].	106,32
1888	Dorn [5],	106,24
1888	Wuilleumier [6].	106,27

Pour passer de l'unité Siemens à l'ohm légal, on fera usage de la relation

$$\text{U.S} = \frac{1}{1,06} \text{ ohm légal.}$$

(1) Extrait du rapport présenté à la seconde séance de la Conférence internationale des unités électriques, par M. Mascart, président et rapporteur de la sous-commission.

(2) Séance du 3 mai 1884.

(3) Communication à l'Association britannique à Manchester.

(4) *Abhandl. der k. bayer. Akad. der Wissensch.*, IIe classe, vol. 16.

(5) *Ac. des Sc. de Berlin*, 1888.

(6) *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 1888.

Pour passer de l'unité de l'Association britannique à l'ohm légal, le Comité de cette Association a adopté la relation

$$U.S = 0{,}95412\ B.A.U,$$

résultant des expériences de lord Rayleigh et Mrs. Sidgwick (1), d'où l'on déduit

$$0{,}95412\ B.A.U = \frac{1}{1{,}06}\ \text{ohm légal}.$$

D'après Glazebrook et Fitzpatrick (2), on aurait plus exactement

$$U.S = 0{,}95352\ B.A.U,$$

d'où

$$0{,}95352\ B.A.U = \frac{1}{1{,}06}\ \text{ohm légal}.$$

2. Unité de force électromotrice. — Volt.

Le volt étant égal à

$$10^8\ |\mathcal{E}_m|_{CGS}$$

vaut

$$10^8\ \frac{|\mathcal{E}_s|_{CGS}}{3.10^{10}}$$

ou

$$\frac{1}{300}\ |\mathcal{E}_s|_{CGS}.$$

L'unité électrostatique (CGS) de force électromotrice vaut donc

300 volts.

La différence de potentiel capable de produire entre deux plateaux une étincelle de $0^c{,}1$ étant égale à $14{,}7\ |\mathcal{E}_s|_{CGS}$, vaut, par suite,

4410 volts.

Ainsi que le montre le tableau suivant, le volt est une force

(1) *Phil. Trans.*, 1883.
(2) *Phil. Trans.*, 1888.

faible, de quelque
importance pour la
une solution qu'eil
grave pour qu'on
recherches scientifi
mises par la différ
et le chiffre admis

En conséquence
la Conférence ad
L'ohm légal
de 1 millimètr
longueur à la t
D'après les
longueur de la
semble pouvoir

avec une erre

Voici, en eff

Pour pass
de la relatio

([1]) Extrait d
nale des un
commission
([2]) Séanc
([3]) Comm
([4]) *Abhandl*
([5]) *Ac. des*

Les forces électromotrices des couples thermoélectriques entre 0° [et] 100° sont de l'ordre des millièmes de volt. Ainsi la force électromotrice du couple bismuth-cuivre entre 0° et 100° est égale environ à

$$0^{v},004.$$

L'établissement d'un arc électrique entre deux charbons exige une force électromotrice supérieure à

$$30 \text{ volts}.$$

La différence de potentiel entre les deux extrémités d'une lampe à incandescence est variable, suivant les modèles, de quelques volts à plus de 100 volts.

3. Unité d'intensité de courant. — Ampère.

La valeur (CGS) d'un ampère est donnée par l'équation symbolique

$$1 \text{ amp} = \frac{\text{volt}}{\text{ohm}} = \frac{10^8 \, |\mathcal{E}_m|_{(CGS)}}{10^9 \, |\mathcal{R}_m|_{(CGS)}},$$

où

$$1 \text{ amp} = \frac{1}{10} \, |\mathfrak{J}_m|_{(CGS)}.$$

Un ampère vaut donc $\frac{1}{10}$ de l'unité électromagnétique (CGS) d'intensité.

Au sujet du nom donné à cette unité, M. Helmoltz a présenté au Congrès des électriciens (séance du 21 septembre 1881) les observations suivantes :

« Il existait deux systèmes de mesures absolues : l'un, employé en ...ne d'après Gauss et Weber, prenait pour unités fondamen... millimètre et le milligramme; l'autre, en usage en Angle...rtait du centimètre et du gramme. Il n'y avait donc pas ...nce parfaite entre les mesures des deux pays. Or, la Commis...nçaise ayant défini le gramme par le poids d'un centimètre ...u, il était naturel de conserver les mêmes bases pour étendre ...e métrique à d'autres quantités. En fait, l'Association bri... n'avait défini que l'ohm et le volt, mais n'avait point donné d'intensité; et ce n'est que peu à peu qu'on s'accoutuma en ...re à employer, sous le nom de *weber*, une unité d'intensité ...ans un ohm) qui se trouvait être dix fois plus grande que

électromotrice de l'ordre de grandeur des forces électromotrices des éléments de piles hydroélectriques usuels.

	I. *Couples étalons à 15°.*	Forces électromotrices.
Sir W. Thomson.	Zinc. Solution saturée de sulfate de zinc. Solution demi-saturée de sulf. de cuivre. Cuivre.	1,074
Latimer Clark.	Zinc. Sulfate de zinc fondu. Sulfate de mercure pâteux. Mercure.	1,435
Latimer Clark à liquide.	Zinc. Solution de sulfate de zinc à 15 %. Sulfate mercureux. Mercure.	1,465
Gouy.	Zinc. Solution de sulfate de zinc à 15 %. Oxyde de mercure. Mercure.	1,390
	II. *Couples usuels.*	
Volta.	Zinc. Eau ordinaire. Cuivre.	0,98
Daniell.	Zinc amalgamé. 1 acide sulfurique + 12 eau. Solution saturée de sulfate de cuivre. Cuivre.	0,97
Bunsen.	Zinc amalgamé. 1 acide sulfurique + 12 eau. Acide azotique fumant. Charbon.	1,94
Leclanché.	Zinc amalgamé. Solution de sel ammoniac. Bioxyde de manganèse et charbon.	1,46
Poggendorf.	Zinc amalgamé. 12 bichromate de potasse + 25 acide sulfurique + 100 eau. Charbon.	2,01

Les forces électromotrices des couples thermoélectriques entre 0° et 100° sont de l'ordre des millièmes de volt. Ainsi la force électromotrice du couple bismuth-cuivre entre 0° et 100° est égale environ à

$$0^v,004.$$

L'établissement d'un arc électrique entre deux charbons exige une force électromotrice supérieure à

30 volts.

La différence de potentiel entre les deux extrémités d'une lampe à incandescence est variable, suivant les modèles, de quelques volts à plus de 100 volts.

3. Unité d'intensité de courant. — Ampère.

La valeur (CGS) d'un ampère est donnée par l'équation symbolique

$$1 \text{ amp} = \frac{\text{volt}}{\text{ohm}} = \frac{10^8 \, |\mathcal{E}_m|_{(CGS)}}{10^9 \, |\mathcal{R}_m|_{(CGS)}},$$

d'où

$$1 \text{ amp} = \frac{1}{10} \, |\mathcal{I}_m|_{(CGS)}.$$

Un ampère vaut donc $\frac{1}{10}$ de l'unité électromagnétique (CGS) d'intensité.

Au sujet du nom donné à cette unité, M. Helmoltz a présenté au Congrès des électriciens (séance du 21 septembre 1881) les observations suivantes :

« Il existait deux systèmes de mesures absolues : l'un, employé en Allemagne d'après Gauss et Weber, prenait pour unités fondamentales le millimètre et le milligramme; l'autre, en usage en Angleterre, partait du centimètre et du gramme. Il n'y avait donc pas concordance parfaite entre les mesures des deux pays. Or, la Commission française ayant défini le gramme par le poids d'un centimètre cube d'eau, il était naturel de conserver les mêmes bases pour étendre le système métrique à d'autres quantités. En fait, l'Association britannique n'avait défini que l'ohm et le volt, mais n'avait point donné d'étalon d'intensité; et ce n'est que peu à peu qu'on s'accoutuma en Angleterre à employer, sous le nom de *weber*, une unité d'intensité (un volt dans un ohm) qui se trouvait être dix fois plus grande que

l'unité employée par Weber lui-même et que l'on appelait aussi *weber* en Allemagne. Déjà des confusions s'établissent dans les ouvrages de physique entre ces deux webers, et si, après la revision de l'étalon de résistance, on eût conservé le nom de weber au courant produit par un volt dans le nouvel ohm, la confusion eût été inextricable. On a donc jugé préférable de supprimer ce nom, de mettre à la place, pour la nouvelle unité d'intensité, le nom d'Ampère, et ce choix est amplement justifié par les importants travaux du grand savant auquel on doit la connaissance claire des phénomènes électromagnétiques; il a, en outre, l'avantage de joindre le nom d'un Français à ceux des illustrations allemandes, anglaises et italiennes qui ont déjà servi de parrains aux autres unités. »

Le rapport qui vient d'être indiqué entre le weber anglais et le weber allemand est facile à vérifier. Le premier weber est l'unité d'intensité d'un système dont les unités fondamentales sont :

$$\mathfrak{L}_1 = 10^9\ \text{cm}, \qquad \mathfrak{T}_1 = \text{sec}, \qquad \mathfrak{M}_1 = 10^{-11}\ \text{grm}.$$

Le second est l'unité d'intensité d'un système dont les unités fondamentales sont :

$$\mathfrak{L}_2 = 10^{-1}\ \text{cm}, \qquad \mathfrak{T}_2 = \text{sec}, \qquad \mathfrak{M}_2 = 10^{-3}\ \text{grm}.$$

Les dimensions d'une intensité étant

$$F^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

le rapport de ces deux intensités est

$$\left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10^{-8} . 10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10.$$

Si l'on se rappelle (voir chapitre IV, livre II) que l'unité de force du système de Gauss est 10.000 fois plus petite que celle du système CGS, il est encore plus simple de remarquer que l'unité d'intensité de ce système, ou weber allemand, doit être $(10.000)^{\frac{1}{2}} = 100$ fois plus petite que l'unité CGS. Or, le weber anglais, identique à l'ampère, est 10 fois plus petit que cette dernière ; il vaut donc 10 fois le weber allemand.

Un courant d'un ampère dégage, en une seconde, dans un voltamètre, une masse d'argent égale à

$$1^{mgr},1192 \text{ [1]},$$

ou une masse d'hydrogène égale à

$$0^{mgr},0103696,$$

dont le volume dans les conditions normales est

$$0^{cm^3},11623.$$

Un élément Daniell de taille moyenne, dont les pôles sont réunis par un circuit de résistance négligeable, donne un courant d'environ un ampère.

Un élément Bunsen moyen, dans les mêmes circonstances, donne un courant d'une quinzaine d'ampères.

4. Unité de quantité. — Coulomb.

Un courant d'un ampère débite un coulomb par seconde.

La quantité de matière décomposée par un courant dans un voltamètre est proportionnelle à l'intensité du courant et au temps, et par conséquent à la quantité d'électricité mise en jeu. I et T peuvent recevoir des valeurs très diverses; à une même valeur du produit IT correspond toujours un même effet électrochimique. En d'autres termes, de quelque façon qu'il soit mis en jeu, un même nombre de coulombs décompose toujours une même masse d'un électrolyte donné.

Un coulomb met en liberté une masse d'hydrogène égale à

$$0^{gr},0000103696$$

et une masse

$$0^{gr},0000103696\,\varepsilon$$

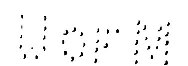
d'un corps dont l'équivalent électrochimique est ε, celui de l'hydrogène étant 1.

D'après cela, pour mettre en liberté un équivalent électrochimique (ε^{gr}) d'un corps, il faut

$$\frac{1}{0,0000103696} = 96435 \text{ coulombs.}$$

---

(1) Potier et Pellat, *Soc. franç. de Physique*, 15 mars 1889.



Le système pratique a donc pour bases les grandeurs suivantes :

$$10^9\ \text{cm}, \qquad \text{sec}, \qquad 10^{-11}\ \text{grm},$$

si on le rapporte au type (LTM), ou

$$10^9\ \text{cm}, \qquad \text{sec}, \qquad 10^{-2}\ \text{dyne},$$

si on le rapporte au type (LTF).

La connaissance de ces bases permettra de trouver aisément, à l'aide des symboles de dimensions, la valeur (CGS) d'une unité pratique quelconque.

Par exemple, soit à trouver la valeur en ergs de l'unité pratique de travail. On écrira l'équation symbolique :

$$|\mathfrak{M}|\ |\mathfrak{L}|^2\ |\text{sec}|^{-2} = x\ |\text{gr}|\ |\text{cm}|^2|\ |\text{sec}|^{-2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{|\mathfrak{M}|}{\text{gr}}\right)\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{sec}}\right)^2 = 10^{-11}\, 10^{18} = 10^7;$$

donc, *unité prat. de travail* $= 10^7$ ergs.

D'une manière générale, soient $|\mathcal{G}|$ et $|\mathcal{G}_m|$ l'unité pratique et l'unité électromagnétique (CGS) d'une grandeur quelconque dont le symbole de dimensions électromagnétiques est

$$L^{\lambda'}\ T^{\tau'}\ F^{\varphi'}.$$

On a

$$|\mathcal{G}| = (10^9)^{\lambda'}\ (10^{-2})^{\varphi'}\ |\mathcal{G}_m|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 10^{9\lambda' - 2\varphi'}\ |\mathcal{G}_m|,$$

et par suite, en se reportant à la relation générale entre $|\mathcal{G}_m|$ et $|\mathcal{G}_s|$:

$$|\mathcal{G}| = V_i^{\lambda - \lambda'}\ 10^{9\lambda - 2\varphi'}\ |\mathcal{G}_s|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 3^{\lambda - \lambda'}\ 10^{10\lambda - 2\varphi' - \lambda'}\ |\mathcal{G}_s|.$$

ART. 2. — *Nomenclature des principales unités pratiques.*

Le Congrès international des électriciens, réuni à Paris en 1881, a sanctionné le système d'unités établi par l'Association britannique en votant à l'unanimité les résolutions suivantes :

« 1° *On adoptera pour les mesures électriques les unités fondamentales : centimètre, masse du gramme, seconde* (CGS) ;

» 2° *Les unités pratiques l'*OHM *et le* VOLT *conserveront leurs définitions actuelles :* 10^9 *pour l'ohm et* 10^8 *pour le volt ;*

» 3° *L'unité de résistance (ohm) sera représentée par une colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade ;*

» 4° *Une Commission internationale sera chargée de déterminer, par de nouvelles expériences, pour la pratique, la longueur de la colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade, qui représentera la valeur de l'ohm ;*

» 5° *On appelle* AMPÈRE *le courant produit par un volt dans un ohm ;*

» 6° *On appelle* COULOMB *la quantité d'électricité définie par la condition qu'un ampère donne un coulomb par seconde ;*

» 7° *On appelle* FARAD *la capacité définie par la condition qu'un coulomb dans un farad donne un volt.* »

La nomenclature des unités pratiques a été complétée au deuxième Congrès international des électriciens tenu à Paris en 1889 par les résolutions suivantes :

« *L'unité pratique de travail est le* JOULE. *Le joule vaut* 10^7 *unités CGS de travail. C'est l'énergie équivalente à la chaleur dégagée pendant une seconde par un ampère dans un ohm.*

» *L'unité pratique de puissance est le* WATT. *C'est la puissance d'un joule par seconde. Le watt vaut* 10^7 *unités CGS.*

» *Le Congrès exprime le vœu que dans la pratique industrielle on exprime la puissance des machines en kilowatts, au lieu de l'exprimer en chevaux-vapeur.*

» *L'unité pratique de coefficient d'induction est le* QUADRANT. *Le quadrant vaut* 10^9 *centimètres.* »

Dans l'évaluation pratique des grandeurs électriques, il est, dans certains cas, nécessaire, pour éviter les trop grands nombres, d'avoir recours à des unités secondaires formées de multiples ou de sous-multiples des unités principales. Voici le tableau des multiples et sous-multiples généralement adoptés :

Puisqu'un courant d'un ampère débite un coulomb en une seconde, il débite en une heure

3600 coulombs.

On emploie quelquefois cette quantité comme unité secondaire sous le nom d'*ampère-heure*.

D'une manière générale, la quantité débitée par un courant de I ampères pendant T secondes est IT coulombs. — A ce débit correspond la mise en liberté d'une masse

$$0,0000103696\ \varepsilon \mathrm{I T}$$

d'un corps d'équivalent électrochimique ε.

Il existe entre le coulomb et l'unité (CGS) électromagnétique de quantité la même relation qu'entre l'ampère et l'unité (CGS) électromagnétique d'intensité. On a donc

$$1 \text{ coulomb} = \frac{1}{10}\,|\mathcal{Q}_m|_{(\mathrm{CGS})},$$

et par suite

$$1 \text{ coulomb} = 3.10^9\,|\mathcal{Q}_s|_{(\mathrm{CGS})}.$$

5. Unité de capacité. — Farad.

Puisqu'on a par définition

$$1 \text{ farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}},$$

il en résulte

$$1 \text{ farad} = \frac{\frac{1}{10}\,|\mathcal{Q}_m|_{\mathrm{CGS}}}{10^8\,|\mathcal{E}_m|_{\mathrm{CGS}}} = \frac{1}{10^9}\,|\mathcal{C}_m|_{\mathrm{CGS}} = 9.10^{11}\,|\mathcal{C}_s|_{\mathrm{CGS}}.$$

Un farad est donc égal à la capacité d'une sphère isolée d'un rayon de

$$9.10^{11} \text{ cm},$$

valant environ 1400 fois le rayon moyen de la terre ou environ 14 fois le rayon du soleil.

Dans la pratique, on évalue ordinairement les capacités en *microfarads* ou millionièmes de farad.

Puisque

$$1 \text{ farad} = 9.10^{11} \, |\mathcal{C}_s|_{cgs},$$

on a

$$1 \text{ microfarad} = 9.10^{5} \, |\mathcal{C}_s|_{cgs}.$$

La capacité de la terre étant égale à

$$637110400 \, |\mathcal{C}_s|_{cgs}$$

vaut

$$\frac{637110400}{9.10^{5}} \text{ microfarad}$$

ou environ

$$707 \text{ microfarads.}$$

Les câbles sous-marins ont une capacité moyenne de

$$0^{\mu f},4$$

par nœud (1852^{m}) de longueur.

6. Unité de travail ou d'énergie. — Joule.

D'après la remarque faite au chapitre VII (livre III), on peut, pour faire usage des formules :

$$W = \tfrac{1}{2}\, QE,$$
$$W = \tfrac{1}{2}\, CE^{2},$$
$$W = \tfrac{1}{2}\, \frac{Q^{2}}{C},$$
$$W = EIT,$$
$$W = RI^{2}T,$$

se servir des valeurs numériques en unités pratiques des grandeurs qui y figurent. Le résultat est le même que si l'on effectuait le calcul dans le système électrostatique ayant les mêmes bases géométriques et mécaniques que le système électromagnétique pratique. Une énergie électrique se trouve

alors exprimée en fonction de l'unité d'énergie déduite de ces bases, laquelle, ainsi que nous l'avons vu plus haut (art. 1), est égale à

$$10^7 \text{ ergs.}$$

Cette unité a reçu le nom de *joule*.

Ainsi, on obtiendra la valeur en joules de l'énergie d'un condensateur en prenant :

La moitié du produit du nombre de coulombs représentant la charge par le nombre de volts représentant la différence de potentiel des armatures;

Ou la moitié du produit du nombre de farads représentant la capacité par le carré du nombre de volts représentant la différence de potentiel des armatures;

Ou enfin la moitié du quotient du carré du nombre de coulombs représentant la charge par le nombre de farads représentant la capacité.

On aura la valeur en joules de l'énergie mise en jeu dans un circuit pendant un temps donné en faisant le produit du nombre de volts représentant la force électromotrice par le nombre d'ampères représentant l'intensité du courant et par le nombre de secondes représentant le temps; ou encore en faisant le produit du nombre de volts représentant la force électromotrice par le nombre de coulombs mis en jeu dans le circuit pendant le temps donné.

Enfin, on obtiendra l'équivalent en joules de la chaleur dégagée dans une portion de circuit pendant un temps donné en faisant le produit du nombre d'ohms représentant la résistance par le carré du nombre d'ampères représentant l'intensité et par le nombre de secondes représentant le temps.

Une grande calorie équivaut à

$$424{,}2 \text{ Kg.m} = 4{,}161.10^{10} \text{ ergs.}$$

Une petite calorie (gramme-degré) équivaut par suite à

$$4{,}161.10^7 \text{ ergs} = 4{,}161 \text{ joules.}$$

Donc

$$1 \text{ joule} = \frac{1}{4,161} \text{ petite calorie} = 0,240 \text{ petite calorie}.$$

Si l'on remarque que la chaleur spécifique de l'air à pression constante est

$$0,2381,$$

on voit qu'un joule est à très peu près l'équivalent de la chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'une masse d'air de 1gr (1).

7. Unité de puissance. — Watt.

L'unité pratique de puissance ou *watt* est la puissance d'une source d'énergie qui produirait un joule par seconde.

Un appareil électrique présentant une force électromotrice E et traversé par un courant d'intensité I met en jeu une puissance représentée par

$$EI.$$

Si le nombre E désigne des volts et le nombre I des ampères, le nombre EI désigne des watts.

Puisque le joule vaut 10^7 ergs, le watt vaut 10^7 fois l'unité CGS de puissance mécanique. On a donc

$$1 \text{ watt} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}.$$

Suivant les règles du calcul symbolique (voir chapitre VI, livre II), de cette égalité on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \text{ watt} &= 10^7 \frac{\text{dyne.cm}}{\text{sec}} \\ &= 10^7 \frac{\text{Kg}}{980960} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \\ &= \frac{10^5}{980960} \frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}} \ (^2). \end{aligned}$$

(1) Blakesley. — *On some fact, connected with the systeme of scientific units of measurement.* (*Philos. mag.*, 5e s., t. XXVII, 1889, p. 373.)

(2) C'est-à-dire environ $\frac{1}{10} \frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}}$.

Les unités de puissance actuellement employées par les ingénieurs mécaniciens sont, dans les pays qui ont adopté le système métrique : *le kilogrammètre par seconde, le cheval-vapeur,* et enfin une unité de création toute récente (1) : *le poncelet,* valant 100 kilogrammètres par seconde.

En Angleterre, l'unité industrielle de puissance est le *Horse-Power,* défini par Watt comme valant *33,000 foot-pound par minute* ou *550 foot-pound* par seconde, ce qui fait 75,9 kilogrammètres par seconde.

Les valeurs en watt de ces diverses unités de puissance sont données par les égalités suivantes :

$$1 \frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}} = 9{,}8096 \text{ watt},$$

$$1 \text{ Cheval vap} = 75.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}73572 \text{ kilowatt.}$$

$$1 \text{ Poncelet} = 100.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}98096 \text{ kilowatt.}$$

$$1 \text{ Horse-Power} = 75.9.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}74454 \text{ kilowatt.}$$

8. Résumé des relations entre les nouvelles mesures pratiques et les anciennes.

En résumé, pour appliquer les formules avec les unités pratiques, il faudra y introduire comme valeur numérique :

D'une longueur, sa valeur en mètres divisée par 10^7;

D'un temps, sa valeur en secondes;

D'une masse, sa valeur en grammes-masses multipliée par 10^{11};

D'une force, sa valeur en grammes multipliée par 98096;

D'un travail, sa valeur en kilogrammètres multipliée par 9,8096;

D'une quantité de chaleur, sa valeur en calories-kilogrammes multipliée par 4161;

D'une puissance, sa valeur en chevaux-vapeur multipliée par 735,72.

(1) Cette unité a été adoptée par le Congrès de la mécanique appliquée tenu à Paris à l'occasion de l'Exposition universelle de 1889. — Elle ne sera qu'une transition entre le cheval-vapeur si incommode et le kilowatt.

Réciproquement, si l'on veut interpréter en anciennes unités les résultats fournis par un calcul basé sur les unités pratiques, il faudra pour avoir :

Une longueur en mètres, multiplier le nombre obtenu par 10^7;

Une masse en grammes-masses, diviser le nombre obtenu par 10^{11};

Une force en grammes, diviser le nombre obtenu par 98096;

Un travail en kilogrammètres, diviser le nombre obtenu par 98096;

Une quantité de chaleur en calories-kilogrammes, diviser le nombre obtenu par 4161;

Une puissance en chevaux-vapeur, diviser le nombre obtenu par 735,72.

Quant au temps, il sera immédiatement exprimé en secondes.

NOTE VI

Dans les mémoires scientifiques un peu anciens, les considérations relatives à l'influence du choix des unités sur les résultats fournis par l'application des formules sont souvent un peu longues et partant un peu pénibles à suivre. Parvenu au chapitre VIII (livre III) du présent ouvrage, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à les traduire dans la langue concise et claire des formules de dimensions.

En voici deux exemples, empruntés l'un à Gauss, l'autre à Weber, qui, par leur importance historique, ainsi que par leur intérêt propre, méritent de figurer ici à titre d'exercices.

I

Influence du choix des unités sur la valeur numérique de l'intensité du champ magnétique terrestre en un lieu.

« Dum intensitas magnetismi terrestris T per *numerum* k exprimitur, hinc subest unitas certa V, puta vis cum illa homogenea, cujus nexus cum aliis unitatibus immediate datis in praecedentibus quidem continetur, attamen modo aliquantulum complicatiori : operae itaque pretium erit, hunc nexum hic denuo producere, ut quam mutationem patiatur numerus k, si loco unitatem fundamentalium ab aliis proficiscamur, elementari claritate ob oculos ponatur.

» Ad stabiliendam unitatem V proficisci oportuit ab unitate magnetismi liberi M atque unitate distantiae R, statuimusque V aequalem vi ipsius M in distantia R.

» Pro unitate M adoptavimus eam quantitatem fluidi magnetici, quae in quantitatem aequalem M in distantia R collocatam agens producit vim motricem (aut si mavis pressionem) aequalem ei W, quae pro unitate accipitur, i. e. aequalem vi, quam exercet vix acceleratrix A pro unitate accepta in massam P pro unitate acceptam.

» Ad stabiliendam unitatem A duplex via patet : scilicet vel depromi potest a vi simili immediate data, e. g. a gravitate in loco observationis, vel ab ipsius effectu in corporibus movendis. In modo posteriori, quem in calculis nostris secuti sumus, duae novae unitates requiruntur, puta unitas temporis S atque unitas celeritatis C, ut pro

unitate A accipiatur vix acceleratrix ea quae per tempus S agens producit velocitatem C : denique pro hac ipsa accipitur ea quae motui uniformi per spatium R inter tempus S respondet.

» Ita patet, unitatem V a tribus unitatibus vel R P A vel R, P, S pendere.

» Supponamus jam, loco unitatum V, R, M, W, A, P, C, S alias accipi V′, R′, M′, W′, A′, P′, C′, S′ simili quo priores modo inter se nexas, atque utendo mensura V′ magnetismum terrestrem per numerum k' exprimi, qui quomodo se habeat ad k inquirendum est.

» Statuendo

$$\begin{aligned} V &= vV', \\ R &= rR', \\ M &= mM', \\ W &= wW', \\ A &= aA', \\ P &= pP', \\ C &= cC', \\ S &= sS', \end{aligned}$$

erunt v r m w a p c s numeri abstracti, atque

$$kV = k'V' \text{ sive } kv = k',$$

$$v = \frac{m}{r.r},$$

$$\frac{m.m}{r.r} = w = pa,$$

$$a = \frac{c}{s},$$

$$c = \frac{r}{s},$$

e quarum equationum combinatione obtinemus

I $$k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}.$$

II $$k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}.$$

» Quamdiu modum, quem in calculis nostris secuti sumus, retinemus, formula priori uti oportet; e. g. si loco millimetri et milligrammatis metrum et gramma pro unitatibus accipimus, erit

$r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, adeoque $k' = k$; si lineam Parisiensem et libram Berolinensem, habebimus

$$r = \frac{1}{2,255829}, \qquad p = \frac{1}{467711,4},$$

adeoque $k' = 0,002196161\, k$, unde e. g. experimenta VIII producunt valorem T $= 0,0039131$.

» Si modum alterum sequi, atque gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare malumus, statuemus pro observatorio Gottingensi $a = \frac{1}{9811,63}$, unde, quamdiu millimetrum et milligramma retinemus, numeri k per 0,01009554 multiplicandi, mutationesque illarum unitatum secundum formulam II tractandae erunt (¹). »

II

Définition de l'unité absolue de résistance électrique.

« De même qu'on n'a pas à établir d'unité fondamentale pour la vitesse quand on s'est donné les unités de longueur et de temps, de même on n'a pas à établir d'unité fondamentale pour la résistance électrique quand on a défini les unités de force électromotrice et d'intensité de courant; car on peut prendre *pour unité de résistance, la résistance d'un circuit fermé dans lequel l'unité de force électromotrice développe un courant d'intensité égale à l'unité.* Ainsi la détermination des résistances électriques repose sur une unité absolue...

» Voyons maintenant quelles sont les unités de *force électromotrice* et d'*intensité*. Ici encore nous n'avons pas besoin d'établir des unités fondamentales; nous pouvons estimer ces grandeurs en valeur absolue en nous donnant seulement les unités de *magnétisme aimant*, de *magnétisme terrestre*, de *longueur* et de *temps*.

» Nous pouvons prendre pour *unité absolue de force électromotrice la force électromotrice créée par l'unité de magnétisme terrestre dans un circuit fermé quand celui-ci tourne de façon que l'aire de sa projection sur un plan normal à la direction du magnétisme terrestre augmente ou diminue de l'unité de surface pendant l'unité de temps.* Pour *unité absolue d'intensité de courant on*

(¹) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* (Gottingae, sumtibus Dieterichianis, 1833.— Art. 26, pag. 42.)

peut prendre l'intensité d'un courant circonscrivant l'unité de surface et dont l'action extérieure calculée d'après les lois de l'électromagnétisme est égale à celle d'un barreau aimanté qui contiendrait l'unité de magnétisme d'aimant. Quant aux unités absolues de *magnétisme d'aimant* et de *magnétisme terrestre,* elles sont connues par le travail de Gauss : *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* Gottingae, 1833. (*Ann.*, Bd XXVII, S. 241 und 591).

» De ce qui précède, il ressort évidemment que les mesures de résistances électriques peuvent être obtenues en valeur absolue si l'on se donne seulement trois grandeurs fondamentales : celles de *longueur,* de *temps* et de *masse,* car les valeurs absolues récemment obtenues par Gauss du magnétisme d'aimant et du magnétisme terrestre ne dépendent que de ces trois grandeurs fondamentales. Un examen plus approfondi montre que, de ces trois grandeurs, celle de masse n'entre pas en considération ; on peut le voir à l'inspection des relations simples suivantes établies pour la mesure absolue des diverses grandeurs considérées tout à l'heure.

» Nous avons comme unités fondamentales l'unité de longueur R et celle de temps S ; comme unités absolues, l'unité de surface F, celles de magnétisme d'aimant et de magnétisme terrestre M et T, de force électromotrice E, d'intensité de courant J et de résistance W.

» 1° Si wW représente la résistance d'un circuit fermé quelconque, eE la force électromotrice agissant dans ce circuit, iJ l'intensité du courant produit par cette force électromotrice, on a entre les trois nombres w, e, i la relation

$$w = \frac{e}{i}.$$

Donc si on a obtenu les valeurs numériques e et i, on calcule immédiatement w sans avoir à faire de mesure particulière.

» 2° Soient eE la force électromotrice agissant dans un circuit fermé quelconque, fF l'aire circonscrite par ce circuit, tT le magnétisme terrestre dont dépend cette force électromotrice et sS le temps dans lequel le plan du circuit a tourné d'une position parallèle à la direction du magnétisme terrestre à une position normale à cette direction, de telle façon que l'aire limitée par sa projection sur un plan perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre croisse proportionnellement au temps, on a

$$e = \frac{ft}{s},$$

et e se déduit sans mesure particulière des valeurs numériques déterminées pour f, t, s.

» 3° Soient iJ l'intensité d'un courant dans un circuit plan quelconque, fF la surface de ce circuit et mM le magnétisme d'un aimant qui, mis à la place du circuit, son axe étant normal au plan du circuit, produirait, d'après les lois de l'électromagnétisme, les mêmes effets que le courant; on a

$$i = \frac{m}{f}$$

et i se déduit des mesures de m et de f.

» Ces trois relations donnent

$$w = \frac{e}{i} = \frac{f^2 t}{ms},$$

et w se déduit immédiatement des mesures f, t, m, s.

» La valeur numérique de f s'obtient en mesurant la surface circonscrite par le conducteur; celle de s, en mesurant le temps; celles de m et de t ont été trouvées, d'après l'indication de Gauss dans l'ouvrage précité, par une mesure de moment magnétique et de magnétisme d'aimant.

» L'invariabilité de l'unité de résistance électrique peut par suite être garantie aussi longtemps que ces quatre grandeurs : surface, temps, unités de magnétisme d'aimant et de magnétisme terrestre, demeureront invariables.

» Désignons par tT le magnétisme terrestre dont dépend la force électromotrice qui agit dans un circuit fermé dont la résistance a été mesurée, et par m' M le moment magnétique d'un barreau aimanté dont l'axe est parallèle au méridien magnétique, tandis que la droite, menée de son milieu au milieu de la surface du circuit, est normale à ce méridien; ce barreau étant tel que d'après les lois magnétiques il exercerait à la grande distance où se trouve le circuit une action exactement égale à celle que produirait le magnétisme terrestre représenté par tT; enfin désignons par rR la distance du milieu du barreau au milieu de la surface du circuit, on a, d'après *Intensitas*,

$$t = \frac{m'}{r^3}.$$

Portons cette valeur de t dans l'expression de w,

$$w = \frac{f^2}{r^3}\frac{m'}{m}\frac{1}{s}.$$

Désignons par r'R le côté d'un carré dont la surface égale celle du circuit, on a la relation :

$$f = r'^2,$$

d'où

$$w = \frac{r'^3}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \frac{r'}{s}.$$

» Un changement dans les unités données n'a évidemment aucune influence sur la valeur du facteur $\left(\frac{r'^3}{r^3} \frac{m'}{m}\right)$, tandis qu'un changement des unités de longueur ou de temps influe sur la valeur de $\frac{r'}{s}$ et par suite sur celle de w, à moins que ces deux unités ne varient proportionnellement. La valeur de w est donc indépendante de tout changement d'unités qui n'affecte pas la valeur des vitesses. Mais, si par un changement d'unité la valeur de l'unité de vitesse devient n fois plus grande ou plus petite, w devient n fois plus petit ou plus grand parce que la résistance est mesurée avec une unité n fois plus grande ou plus petite. L'invariabilité de l'unité de résistance ne dépend donc que de l'invariabilité de l'unité de vitesse : toutes deux varient dans le même rapport (1). »

(1) Weber, *Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse* (*Annal. der Phys. und Chem.*, Bd LXXXII, 1851, p. 337).

BIBLIOGRAPHIE

1873. J. Clerk Maxwell. — *A treatise on Electricity and Magnetism*, passim.

1873. — *Reports of the committee on electrical standard's appointed by the Brit. Assoc. for the advancement of science*, reprinted by permission of the councill. London, E. et F.-N. Spon.

1881. Blavier. — *Des grandeurs électriques et de leur mesure en unités absolues*. Paris, Dunod.

1881. *Congrès international des électriciens. — Comptes rendus des travaux*. Paris, Masson, 1882.

1882. Clausius. — *Ueber die verschiedenen Maassystem zur Messung electrischer und magnetischer Grossen. — Separat Absdruck aus den Verhanderungen der naturhist. Vereins der preusser Rheinland und Wesfalens*. Band XXXIX.

Des différents systèmes de mesure des grandeurs électriques et magnétiques (*Annales de chimie et de phys.*, 5e série, t. XXVIII, p. 81. — *Journal de phys.*, 2e série, t. I, 1882, p. 273).

1882. J.-D. Everett. — *On the dimensions of a magnetic pole in the electromagnetic system of units* (*Phil. Mag.*, mai et juin 1882).

1882. J.-J. Thomson. — *On the dimensions of a Magnetic pole in the electrostatic system of units* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XIII, p. 427, juin 1882).

Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le système d'unités électrostatiques (*Journ. de phys.*, 2e série, t. I, 1882, p. 318).

1882. Maurice Lévy. — *Sur les unités électriques*. Conférence faite à la Société d'encouragement. Paris, Gauthier-Villars, 1882.

1882. J. Bertrand. — *Sur les unités électriques* (*Journal des Savants*, nov. 1882).

1882. Helmholtz. — *Ueber absolute Maassystem fur electrische und magnetisch. Grossen* (*Wied. Ann.*, N. F. XVII, 1882, 42).

1883. W. Thomson. — *Electrical units of measurement* (A Lecture delivered at the Institution of civil Engineers, may 3 1883).

1883. Mercadier. — *Sur les unités mécaniques et électriques* (*Lumière électrique*, t. VIII, 1883, pp. 6, 44, 70, 114).

1883. Vashy. — *Sur les divers systèmes d'unités électriques* (*Lumière électrique*, t. VIII, 1883, pp. 46, 116, 182).

1883. MERCADIER et VASHY. — *Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques* (*Journ. de phys.*, 2e série, t. II, 1883, p. 245).

1883. J. BORGMANN. — *Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques* (*Journ. de phys.*, 2e série, t. II, 1883, p. 551).

1884. Y. MACHAI. — *Mémoires sur les dimensions des quantités électriques et le choix d'un système absolu d'unités dérivées* (*Ann. de chimie et de phys.*, 6e série, t. I, 1884, p. 412).

1884. SZARVADY. — *Sur les systèmes absolus d'unités* (*Lumière électrique*, t. XIV, 1884, pp. 321, 375, 413).

1885. H. HERTZ. — *Ueber die Dimensionen der magnetischen Pols in verschiedenen Maassystemen* (*Wied. Ann.*, t. XXIV, 1885, p. 114. — *Journ. de phys.*, 2e série, t. IV, 1885, p. 325).

1885. J. BOULANGER. — *Des systèmes d'unités dits absolus* (*Lumière électrique*, t. XXVI, 1885, p. 5).

1887. RAVEROT. — *Essai sur les dimensions des grandeurs physiques* (*Lumière électrique*, t. XXIII, 1887, p. 101).

1889. BERTRAND. — *Théorie mathématique de l'électricité*. Paris, Gauthier-Villars, chap. XIII.

1889. A.-W. RUCKER. — *On the suppressed dimensions of physical quantities* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXVII, 1889, p. 104).

1890. RAVEROT. — *Les dimensions des grandeurs physiques dans les divers systèmes absolus de mesures* (*Lumière électrique*, 28 juin 1890, t. XXXVI, p. 601).

INDEX

(Les livres et les chapitres sont désignés en chiffres romains, les pages en chiffres arabes.)

A

Accélération : I, IV, 29.
Ampère : unité pratique d'intensité, III, X, 219.
Ampère-heure : III, X, 222.
Angles : plans, I, III, 22.
Angles : solides, I, III, 24.
Angles : évaluation, I, VIII, 51.

B

Barie : II, IV, 87.
Bases du système électromagnétique pratique : III, X, 212.
Bertrand : homogénéité et similitude, I, IX, 61 et suiv.
Bertrand : système d'unités électriques, III, VI, 180.

C

Calculs symboliques : II, VI, 103, et III, VIII, 199.
Capacité électrique : III, II, 143.
Champ électrique : III, II, 140.
Changements d'unités : II, V, 90.
Charges électriques : III, II, 136.
Cheval-vapeur : définition, I, VIII, 52.
Cheval-vapeur : valeur en watts, III, X, 226.
Clausius : système électrostatique, III, IV, 164 et suiv.
Coefficient V_i : III, VII, 182 et suiv.
Commission de l'Association britannique : III, IX, 203.
Conductibilité électrique : III, II, 148.
Constantes physiques : III, I, 124.
Conversion des anciennes mesures de longueur en mètres : II, V, 92.
Conversion des anciens poids en grammes : II, V, 93.
Coulomb : unité pratique de quantité, III, X, 221.

D

Degré, unité d'angle : I, VIII, 51.
Densité : I, IV, 39.
Densité de l'eau dans différents systèmes : II, V, 101.
Densité électrique : III, II, 138.
Dimensions : définition, I, VII, 46.
Dimensions des grandeurs géométriques et mécaniques : I, VII, 47.

E

Équations réduites : III, I, 133.
Équations symboliques : III, VI, 106 et suiv.
Erg : II, IV, 87.

F

Farad : unité pratique de capacité, III, X, 222.
Feuillet magnétique : définition, III, II, 146.
Feuillet magnétique : courant équivalent, III, III, 162.
Flux de force électrique : III, II, 141.
Forces : I, IV, 31.
Forces vives : I, IV, 42.
Forces électromotrices des principaux couples : III, X, 218.
Formule d'Ampère : III, II, 137.
Formule de Biot et Savart : III, II, 137.
Formule de Van der Walls : III, I, 131.

G

Grade, unité d'angle : I, VIII, 51.
Grandeurs en général : définit., I, I, 6.
Grandeurs en général : mesure, I, I, 7.
Grandeurs en général : valeur numérique, I, I, 7.
Grandeurs en général : représentation, I, I, 7.
Grandeurs dérivées : I, VII, 45.

Grandeurs électriques : tableaux, II, II, 152.
Grandeurs électriques : dimensions, III, II, 153 et suiv.
Grandeurs fondamentales : I, VII, 45.
Grandeurs géométriques et mécaniques : I, II, 8 et 9.
Grandeurs normales : I, VIII, 54.

H

Homogénéité en géométrie : I, IX, 55 et suiv.
Homogénéité en mécanique : I, IX, 60 et suiv.
Horse-Power, unité anglaise de puissance : III, X, 226.

I

Intensité d'un courant : III, II, 137.
Intensité d'une pression : I, IV, 34.

J

Joule : unité pratique de travail ou d'énergie, III, X, 223.

K

Kilogramme : II, III, 81.
Kilogrammètre : définition, I, VIII, 54.
Kilogrammètre : valeur en watts, III, X, 226.

L

Lois physiques : III, I, 115.
Longueurs : I, III, 9 et suiv.

M

Masses : I, IV, 37 et suiv.
Masses magnétiques : III, II, 137.
Maxwell : système électrostatique, III, IV, 170.
Mesures en général : I, I, 7.
Mesures électrostatiques : III, IV, 171.
Mesures électromagnétiques : III, V, 178.
Mesures pratiques : III, X, 226.
Mètre : II, III, 79.
Moments : I, IV, 32.
Moments d'inertie : I, IV, 40.
Moments magnétiques : III, II, 145.

O

Ohm : unité pratique de résistance, III, X, 209, 214.
Ohm légal : III, X, 216.

P

Parallélipipèdes : I, III, 16 et suiv.
Perche des eaux et forêts : I, VIII, 50.
Poids spécifique : I, IV, 36.
Poids spécifique du cristal de roche : II, V, 95.
Poncelet : unité de puissance, III, X, 226.
Potentiel électrique : III, II, 142.
Puissance mécanique : I, IV, 34.

Q

Quantité en général : I, I, 5 et suiv.
Quantité d'électricité : III, II, 136.
Quantité de mouvement : I, IV, 41.

R

Radian : I, VIII, 54.
Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques : III, VII, 189.
Rectangles : I, III, 12.
Résistance électrique : III, II, 149.
Résistance électrique : Remarques relatives aux dimensions, III, IV, 167 et III, V, 177.
Résistance spécifique : III, II, 150.

S

Seconde : II, III, 81.
Similitude en géométrie : I, IX, 55 et suiv.
Similitude en mécanique : I, IX, 63.
Surfaces : I, III, 12 et suiv.
Système coordonné d'unités : I, VIII, 55.
Système CGS : II, IV, 85.
Système métrique : II, III, 78.
Systèmes d'unités électriques et magnétiques : III, III, 163.
Système électrostatique : III, IV, 164.
Système électromagnétique : III, V, 174.
Système électrodynamique : III, V, 179.
Système de Gauss : II, IV, 89.

T

Temps : I, IV, 26.
Travail : I, IV, 33.
Types de systèmes d'unités : II, I, 73.

U

Unités en général : I, I, 7.
Unités absolues : I, VIII, 55.
Unités normales : I, VIII, 54.
Unité de force du système de Gauss : II, IV, 90.
Unité du système de l'Association britannique : II, IV, 90.
Unité de masse du système métrique : II, III, 83.
Unité Siemens : III, X, 208.
Unité télégraphique française : III, X, 208.
Unité Varley : III, X, 208.
Unité Wheatstone : III, X, 208.
Unités pratiques : III, X, 213 et suiv.
Unités secondaires du système métrique : II, III, 83.
Unités secondaires du système CGS II, IV, 88.

V

Valeur numérique : I, III, 20.
Vitesse linéaire : I, IV, 27.
Vitesse angulaire : I, IV, 28.
Vitesse du son : II, V, 93.
Volt, unité pratique de force électromagnétique : III, X, 209, 217 et suiv.

W

Watt, unité pratique de puissance : III, X, 225.
Weber, unité d'intensité de courant : III, X, 219.

SYNTHÈSES AU MOYEN DES ÉTHERS
CYANACÉTIQUES ET CYANOSUCCINIQUES

PAR M. LÉONCE BARTHE,
Pharmacien-Major de l'armée,
Agrégé à la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.

INTRODUCTION

Dans un mémoire récent (¹), M. Haller, résumant l'ensemble des recherches qui ont été faites, tant en France qu'à l'étranger, sur des dérivés du méthane, dans lequel 1, 2 ou 3 atomes d'hydrogène ont été remplacés par des radicaux dits *négatifs*, a fait ressortir que, suivant le nombre et la nature des radicaux introduits, la molécule, de neutre qu'elle était primitivement, pouvait prendre un caractère plus ou moins acide.

Cet exposé sert d'introduction à l'ensemble de ses études et de celles de M. Held, un de ses élèves, études qui ont porté sur les éthers malonique, cyanacétique, benzoylacétique et acéto-acétique. Ces recherches ont démontré que lorsqu'on introduit du cyanogène dans le groupement CH^2 de ces molécules, les corps résultants jouissent de propriétés nettement acides et décomposent les carbonates comme les acides les plus énergiques.

La découverte de ces corps a permis d'introduire dans la science une *fonction acide nouvelle* présentant beaucoup d'analogie avec celle des nitroéthanes de M. V. Meyer et celle des dicétones-β découverts depuis dans la série aromatique par

(¹) *Annales de Physique et de Chimie*, 6ᵉ série, t. XVI, p. 403.

MM. Baeyer et Perkin (dibenzoylméthane), et dans la série grasse par M. A. Combes (acétylacétone).

On trouvera dans le mémoire indiqué plus haut l'historique complet de cette théorie si féconde en découvertes, et la nomenclature des nombreux composés préparés par l'auteur lui-même et l'un de ses élèves (1).

Appliquant la méthode décrite par M. Haller pour la préparation du benzoylcyanacétate d'éthyle, j'ai obtenu le benzoylcyanacétate de méthyle (2), $C^6H^5,COCH\langle{}^{CAz}_{CO^2CH^3}$ par l'action du chlorure de benzoyle sur le cyanacétate de méthyle sodé. Ce composé possède une réaction franchement acide, et rentre dans le groupe des corps étudiés par M. Haller et par M. Held.

Le cyanacétate d'éthyle et le cyanacétate de méthyle m'ont servi de point de départ pour mes recherches sur les cyanosuccinates d'éthyle et de méthyle et leurs dérivés.

Avant de faire connaître les résultats acquis dans mes recherches personnelles, je rappellerai sommairement ceux que j'ai obtenus avec M. Haller, et qui, d'ailleurs, ont servi de point de départ à ce travail.

Dans une communication à l'Académie des Sciences (3), nous avons montré que l'éther cyanacétique sodé fournissait, par l'action du monochloracétate d'éthyle, du cyanosuccinate d'éthyle d'abord et en second lieu, par réaction secondaire, du cyanotricarballylate d'éthyle. Nous avons d'ailleurs fait la synthèse de ce dernier composé en traitant directement le cyanosuccinate d'éthyle obtenu dans une préparation précédente par l'alcoolate de soude d'abord, puis par le monochloracétate d'éthyle. En faisant agir sur le cyanosuccinate d'éthyle de l'alcool absolu, saturé d'acide chlorhydrique gazeux, nous avons obtenu l'éther éthényltricarbonique, déjà préparé autrement par M. Bischoff (4).

(1) Held, thèse École supérieure Pharm. Nancy, diplôme supérieur, 1882, et thèse de doctorat ès sciences, Paris, 1888.
(2) *Comptes rendus*, t. CI, p. 1270.
(3) *Ibid.*, t. CVI, p. 1413.
(4) *Liebig's Annal.*, t. CCXIV, p. 38.

J'étudierai, dans un premier chapitre, certaines propriétés physiques et chimiques du cyanosuccinate d'éthyle et du cyanotricarballylate d'éthyle; je ferai aussi connaître un certain nombre de synthèses nouvelles obtenues avec le cyanosuccinate d'éthyle.

Je décrirai ensuite, dans un deuxième chapitre, les espèces chimiques nouvelles que j'ai préparées dans la série méthylique.

La description des composés obtenus par l'action de l'éther α-monobromopropionique et de l'éther monobromosuccinique sur le cyanacétate et le cyanosuccinate d'éthyle sodés fera l'objet d'un troisième chapitre.

Quelques conclusions termineront ce mémoire.

CHAPITRE PREMIER

Action de la potasse sur l'éther cyanosuccinique.

L'éther cyanosuccinique ayant pour formule de constitution
$\begin{matrix} CH \begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ | \\ CH^2-CO^2C^2H^5 \end{matrix}$, l'action de la potasse doit avoir pour effet de saponifier les fonctions *éther* et de transformer la fonction nitrile en fonction acide, réactions qui peuvent être traduites par l'équation suivante :

$$\begin{matrix} CH \begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ | \\ CH^2-CO^2C^2H^5 \end{matrix} + 3KHO + H^2O = \begin{matrix} CH \begin{cases} CO^2K \\ CO^2K \end{cases} \\ | \\ CH^2.\ CO^2K \end{matrix} + 2(C^2H^5OH) + AzH^3.$$

D'après M. Orlowski (1), cette saponification s'effectuerait réellement suivant cette équation et l'auteur aurait obtenu de l'acide éthényltricarbonique. Ajoutons cependant que Bischoff, en essayant de saponifier l'éther de ce dernier acide, n'a pas réussi à l'isoler et a toujours obtenu de l'acide succinique (2).

Enfin, M. Haller a remarqué que, lorsque le groupe CAz est uni à CH, relié lui-même à deux groupes négatifs (éthers cyanomalonique, acétocyanacétique), il s'élimine par la saponification sous forme d'acide carbonique.

Les faits que j'ai observés confirment les essais de M. Bischoff et les remarques de M. Haller. L'éther cyanosuccinique ne fournit à la saponification que de l'acide succinique et non de l'acide éthényltricarbonique. L'équation suivante rend compte de ces

(1) *Journal de la Société chimique russe*, t. IX, p. 278, d'après Beilstein, t. I, p. 685.
(2) *Ann. der Chem. und Pharm.*, t. CCXIV, p. 44.

réactions :

$$\begin{array}{l} CH\left\langle\begin{array}{l}CAz\\ CO^2C^2H^5\end{array}\right. \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array} + 4KHO + H^2O = \begin{array}{l} CH^2.CO^2K \\ \| \\ CH^2.CO^2K \end{array} + AzH^3 + 2(C^2H^5OH) + CO^3K^2.$$

A 20 grammes d'éther cyanosuccinique dissous dans 50 grammes d'alcool à 95°, on a ajouté 25 grammes de potasse caustique pure dissoute dans 150 grammes du même alcool. Le mélange, devenu jaune rougeâtre, a été chauffé au bain-marie dans un ballon muni d'un réfrigérant ascendant pendant dix-huit ou vingt heures. Après une heure et demie environ, l'ammoniaque commence à se dégager, et cela jusqu'à la fin. Il se dépose au fond du ballon un liquide plus dense; cette couche inférieure a été décantée au moyen d'un entonnoir à robinet, filtrée, puis abandonnée sous cloche et dans le vide pendant plusieurs jours; elle a laissé déposer des cristaux transparents, ne contenant pas d'azote, insolubles dans l'alcool et l'éther, solubles au contraire dans l'eau distillée en formant une solution qui, soumise aux réactifs, a fourni les propriétés des succinates alcalins. Quant à la couche supérieure contenue dans le ballon, elle fait effervescence avec l'acide sulfurique.

Le succinate de potasse obtenu, dissous dans de l'eau distillée, a été mélangé à chaud avec une liqueur d'azotate de baryte. Il s'est fait un abondant précipité blanc qui a été retenu sur filtre et soigneusement lavé à l'eau distillée.

Le dosage du métal dans ce composé a fourni les résultats suivants :

	I.	II.	Calculé pour $C^4H^4O^4Ba$ par rapport au sel anhydre.
Poids du sel desséché sous la cloche	0,3070	0,4408	
Perte en H^2O à 115°	0,0125	0,0183	
Soit H^2O p. 100.........	4,07	4,15	
Sulfate de baryte trouvé.	0,2717	0,3895	
Soit Ba	0,15973243	0,22898705	
Et Ba p. 100...........	54,24	54,20	54,15

Le sel analysé est donc du succinate de baryte.

L'alcool, produit de saponification, a été caractérisé par la réaction à l'iodoforme.

La potasse dédouble donc l'éther cyanosuccinique en acide succinique, acide carbonique, alcool et ammoniac.

Cyanotricarballylate d'éthyle $\begin{array}{l} CH^2CO^2C^2H^5 \\ | \\ C \left\langle \begin{array}{l} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{array} \right. \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array}$.

Comme autres propriétés de ce nouveau corps, j'ajouterai que ses solutions alcooliques sont sans action sur les persels de fer. Il se dépose de ces mêmes solutions en cristaux très nets et très volumineux, d'autant plus volumineux que les liqueurs sont peu concentrées et s'évaporent plus lentement. Dans ce dernier cas, on obtient de véritables mâcles. Ces cristaux se conservent fort bien, sans qu'il soit besoin de les soustraire à l'action de l'air ou de la lumière.

M. Goguel, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux, a bien voulu déterminer ces cristaux.

PROPRIÉTÉS CRISTALLOGRAPHIQUES.

« Cristaux volumineux appartenant au système monoclinique, présentant les formes pmh^1, la face h^1 étant très développée (1), puis la face $b^{\frac{1}{2}}$ et des faces ω sur l'angle e inclinées sur les arêtes d, mais non mesurables.

» La face h^1, arrondie légèrement sur les bords, est striée suivant deux directions rectangulaires, comme l'indique la figure, et un peu creusée en trémie.

(1) N'ayant trouvé aucun isomorphisme entre ces cristaux et ceux qui seront étudiés plus loin, nous avons noté les uns et les autres le plus simplement possible.

Néanmoins, dans les petits cristaux, on peut avoir d'assez bonnes mesures pour h^1 ainsi que pour p et m.

» L'observation goniométrique de ces cristaux demande beaucoup de précaution, car ils se ternissent facilement quand on les touche et quelquefois même, s'ils sont gros, éclatent entre lés doigts; les manier avec une pince est aussi très délicat à cause de leur fragilité.

» Voici les mesures qu'ils nous ont fournies :

	Angles des normales.	Mesurés.	
ph^1	(001) (100)	72° 6′	★
mh^1	(110) (100)	54° 20′	
mm	(110) $(\bar{1}11)$	71°	★
$mb^{\frac{1}{2}}$	$(\bar{1}10)$ $(\bar{1}11)$	38° 41′	★
$pb^{\frac{1}{2}}$	(001) $(\bar{1}11)$	61° 26′	
mp sur b	$(\bar{1}10)$ (001)	100° 71′	
mp sur d	(110) (001)	59° 56′	
$h'b^{\frac{1}{2}}$	$(\bar{1}00)$ $(\bar{1}11)$	108° 32′.	

» Choisissant les trois angles qui se prêtent le mieux au calcul, on a :

$$a:b:c = 1,4734:1:1,2093$$
$$ph'\ 72°\ 6'\ »$$

Grâce à la présence du groupe $\text{CH}<^{\text{CAz}}_{\text{CO}^2\text{C}^2\text{H}^5}$, l'éther cyanosuccinique, nous l'avons vu, est susceptible de fournir un dérivé sodé $\text{CNa}<^{\text{CAz}}_{\text{CO}^2\text{C}^2\text{H}^5}$ qui m'a permis de réaliser un certain nombre de synthèses nouvelles par le remplacement ultérieur du métal alcalin par des radicaux d'iodures alcooliques ou de chlorures aromatiques.

Méthylcyanosuccinate d'éthyle, $\begin{array}{l}CH^3.C\left\langle\begin{array}{l}CAz\\CO^2C^2H^5\end{array}\right.\\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; CH^2.CO^2C^2H^5\end{array}$.

La préparation de cet éther offre une particularité curieuse, c'est que si l'on dissout le sodium dans de l'alcool méthylique et si l'on fait agir l'iodure de méthyle sur le cyanosuccinate d'éthyle sodé, on n'obtient plus le corps cherché, mais bien le méthylcyanosuccinate de méthyle, $\begin{array}{l}CH^3.C\left\langle\begin{array}{l}CAz\\CO^2C^2H^5\end{array}\right.\\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; CH^2.CO^2CH^3\end{array}$. J'avais tout d'abord employé de l'alcool méthylique comme dissolvant du sodium; le produit obtenu donnait à l'analyse des résultats tout à fait concordants entre eux, mais tout différents de ceux exigés théoriquement par le méthylcyanosuccinate d'éthyle. J'ai essayé alors de préparer ce corps en tubes scellés vers 70°, mais toujours en présence de l'alcool méthylique. Les résultats fournis par l'analyse du composé formé se rapprochaient absolument des premiers. C'est que, dans ces conditions, le radical CH^3 se substitue au radical C^2H^5 pour donner effectivement le composé $\begin{array}{l}CH^3.C\left\langle\begin{array}{l}CAz\\CO^2CH^3\end{array}\right.\\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; CH^2.CO^2CH^3\end{array}$.

Ce remplacement du radical *éthyle* par le radical *méthyle* ou par un autre radical alcoolique n'a pas lieu de nous étonner. Il a été déjà observé par M. Purdie, à différentes reprises (1), avec les éthers fumarique, cinnamique, acétique..., puis par M. Peters (2), avec les éthers acétylacétique et éthylacétylacétique; MM. Haller et Held (3) ont fait aussi cette remarque à propos des acétylcyanacétates de méthyle et d'éthyle. Enfin, ces substitutions de radicaux alcooliques ont été observées il y a longtemps dans d'autres cas, notamment par MM. Friedel et Crafts (4). J'en donnerai de nouveaux exemples dans la suite de ce travail, et je montrerai

(1) B. B., t. XX, p. 1555.
(2) *Id.*, t. XX, p. 1155 et 3318.
(3) *Bull. Soc. Chim.*, t. XLIX, p. 247, et *Ann. Phys. et Chimie*, 6e série, t. XVII, p. 226.
(4) *Comptes rendus*, t. LVII, p. 877 et 986.

également que le radical *méthyle* peut être remplacé par le radical *éthyle*.

Le composé $CH^3.C\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix}$ (avec $|$ $CH^2.CO^2CH^3$), que je prépare aussi par une autre méthode décrite dans le chapitre II, se produit dans les conditions suivantes : on ajoute à 20 grammes de cyanosuccinate d'éthyle 2 gr. 30 de sodium dissous dans 30 grammes d'alcool méthylique. L'éther cyanosuccinique sodé ainsi produit est chauffé au bain-marie dans un ballon muni d'un réfrigérant ascendant, avec 15 grammes environ d'iodure de méthyle rectifié. Au bout de dix heures à peu près, le mélange neutre au tournesol a été évaporé pour chasser l'alcool méthylique. Au résidu on a ajouté de l'eau qui a précipité un liquide huileux, rougeâtre, puis de l'éther qui a dissous ce dernier composé. La solution, débarrassée de l'éther préalablement desséché sur du chlorure de calcium, a été distillée dans le vide relatif. Il passe d'abord des produits colorés, rougeâtres, dus à la décomposition de l'iodure de méthyle non entré en réaction. A 204° principalement, sous une pression de 0^m045, il distille un liquide huileux, incolore, et il reste un résidu brunâtre dans le rectificateur.

Le produit huileux, rectifié, constitue le méthylcyanosuccinate de méthyle, $CH^3.C\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix}$ (avec $|$ $CH^2.CO^2CH^3$), ainsi que le prouvent les résultats fournis par l'analyse :

	I.	II.	Calculé pour $C^8H^{11}AzO^4$
Poids de la substance..	0,2090	0,5418	
CO^2 trouvé...........	0,3933	1,0356	
H^2O id.	0,1209	0,3061	

Soit en centièmes :

C p. 100.............	51,32	52,12	51,89
H p. 100.............	6,43	6,28	5,95

DOSAGE DE L'AZOTE.

		Calculé pour $C^8H^{11}AzO^4$
Poids de la substance..	0,2475	
Trouvé : Az..........	0,018414	
Soit Az p. 100	7,44	7,56

Pour obtenir le *méthylcyanosuccinate d'éthyle*, $CH^3.C\begin{matrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2C^2H^5\end{matrix}$ · $|$ $CH^2.CO^2C^2H^5$ que j'avais eu en vue de préparer tout d'abord, il suffit de dissoudre le sodium dans l'alcool éthylique anhydre et de chauffer le mélange dans les mêmes conditions. A la température de 189°-191°, sous une pression de 0m08, il distille un liquide huileux, incolore; il constitue le méthylcyanosuccinate d'éthyle, qui se forme en vertu de la réaction suivante :

$$\begin{matrix}CNa\begin{matrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2C^2H^5\end{matrix} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + CH^3I = \begin{matrix}CH^3.C\begin{matrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2C^2H^5\end{matrix} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + NaI.$$

En effet, l'analyse a donné les nombres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{10}H^{15}AzO^4$.
Poids de la substance.	0,5352	0,3811	
Trouvé : CO^2........	1,1037	0,7952	
id. : H^2O........	0,3364	0,2615	
Soit C p. 100........	56,24	56,91	56,34
id. H p. 100........	6,98	7,62	7,04

DOSAGE DE L'AZOTE.

Poids de la substance.	0,4588	0,2545	
AzH^3 trouvée........	0,0357	0,01955	
Az id.	0,0294	0,0161	
Soit Az p. 100.......	6,41	6,33	6,57

Le méthylcyanosuccinate d'éthyle est le mononitrile correspon-

dant à l'éther méthyléthényltricarbonique préparé par M. Bischoff (1) en traitant l'éther éthényltricarbonique sodé par l'iodure de méthyle. MM. Bischoff et Kuhlberg (2) l'ont encore obtenu par l'action de l'éther chloracétique sur l'éther méthylmalonique sodé, et de l'iodure de méthyle sur l'éther méthényltricarbonique sodé.

Éthylcyanosuccinate d'éthyle, $C^2H^5.C\begin{cases}CAz \\ CO^2C^2H^5\end{cases}$ / $CH^2.CO^2C^2H^5$.

Pour le préparer, on ajoute à 20 grammes d'éther cyanosuccinique sodé obtenu comme précédemment, 20 grammes environ d'iodure d'éthyle. On a chauffé le mélange pendant douze heures au bain-marie et au réfrigérant ascendant, jusqu'à réaction neutre au tournesol. On a chassé l'alcool par distillation, et le résidu a été additionné d'eau, puis d'éther. Cette dernière solution, privée d'eau par contact avec du chlorure de calcium, a été distillée dans le vide relatif, sous une pression de 0^m03. Jusqu'à 165° passent des vapeurs rougeâtres dues à la décomposition de l'iodure d'éthyle non entré en réaction, et de 170°-180° une huile incolore, très épaisse, qui est de l'éther éthylcyanosuccinique, formé en vertu de la réaction suivante :

$$\begin{matrix}CNa\begin{cases}CAz \\ CO^2C^2H^5\end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + C^2H^5I = \begin{matrix}C^2H^5.C\begin{cases}CAz \\ CO^2C^2H^5\end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + NaI.$$

En effet, l'analyse a fourni les nombres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{11}H^{17}AzO^4 = 227$.
Poids de la substance.	0,1576	0,2520	
Trouvé : CO^2........	0,3331	0,5336	
id. H^2O	0,1098	0,1750	
Soit C p. 100........	57,64	57,74	58,15
id. H p. 100........	7,74	7,72	7,49

(1) *Liebig's Annalen*, t. CCXIV, p. 53.
(2) *Bericht. Deutsch. Chem. Ges.*, t. XXIII, p. 634.

DOSAGE DE L'AZOTE.

		Calculé.
Poids de la substance.	0,2349	
AzH^3 trouvée	0,017485	
Az id.	0,0144	
Soit Az p. 100.......	6,13	6,17

Ethyléthényltricarbonate d'éthyle, $C^2H^5.C\begin{cases}CO^2C^2H^5\\CO^2C^2H^5\end{cases}$, $|$ $CH^2.CO^2C^2H^5$.

Ce corps a déjà été obtenu par MM. Bischoff et Kuhlberg (1), en traitant l'éther malonique sodé par l'éther chloracétique, ou bien l'éther éthényltricarbonique sodé par de l'iodure d'éthyle; ces auteurs lui ont assigné 281°8 comme point d'ébullition (corr.) à la pression ordinaire.

Pour obtenir ce même composé en partant de l'éther éthylcyanosuccinique, j'ai saponifié la fonction nitrile de ce dernier au moyen de l'acide chlorhydrique gazeux. A 10 grammes d'éther éthylcyanosuccinique, on a ajouté 50 grammes d'alcool absolu saturé d'acide chlorhydrique. Le mélange a été abandonné pendant un mois et demi environ; au bout de ce temps, il s'est formé des cristaux de chlorhydrate d'ammoniaque. L'alcool et l'acide chlorhydrique en excès ont été chassés au bain-marie. Le résidu, traité par l'eau, a abandonné une huile légèrement colorée qui a été reprise par l'éther. La liqueur, lavée avec une solution de carbonate de soude, a été desséchée sur du chlorure de calcium et distillée dans le vide après évaporation de l'éther. A 187° (corr.), sous une pression de 0m05, il passe, même jusque près de 200°, un liquide huileux et incolore. On a obtenu 4 grammes environ de ce produit, qui est privé d'azote. Il constitue l'éthyléthényltricarbonate d'éthyle, qui prend naissance en vertu de la réaction suivante :

$$\underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{C^2H^5.C\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}} + C^2H^5OH + HCl + H^2O = AzH^4Cl + \underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{C^2H^5.C\begin{cases}CO^2C^2H^5\\CO^2C^2H^5\end{cases}}.$$

(1) *Bericht. Deutsch. Chem.*, t. XXIII, p. 634.

En effet, l'analyse a donné les chiffres suivants :

		Calculé pour $C^{13}H^{22}O^6$
Poids de la substance.	0,2010	
Trouvé : CO^2........	0,4207	
id. H^2O........	0,1566	
Soit C p. 100........	57,08	56,93
id. H p. 100........	8,65	8,03

Propylcyanosuccinate d'éthyle, $C^3H^7.C\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases}$. $\;|\; CH^2.CO^2C^2H^5$

A 20 grammes d'éther cyanosuccinique sodé, on ajoute 15 à 16 grammes d'iodure de propyle normal (rectifié à 99°-102°). Le mélange a été chauffé au bain-marie pendant seize ou vingt heures dans un ballon muni d'un réfrigérant ascendant. La liqueur, devenue neutre au tournesol, a été évaporée au bain-marie, traitée par l'eau, puis par l'éther qui a été déshydraté sur du chlorure de calcium. La solution, privée d'éther, a été distillée dans le vide relatif. Sous une pression de 0m045 jusqu'à 175° environ, il passe des vapeurs rougeâtres provenant de l'iodure de propyle en excès. A 205°8 (corr.), il distille un liquide huileux, très épais, de couleur légèrement ambrée. Il reste un résidu noirâtre dans le rectificateur. Cette huile est le propylcyanosuccinate d'éthyle, qui se forme en vertu de la réaction sui ante :

$$\begin{array}{l} CNa\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ |\\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array} + C^3H^7I = \begin{array}{l} C^3H^7.C\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ \quad\quad |\\ \quad\quad CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array} + NaI.$$

Ce composé fournit à l'analyse les résultats suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.
Poids de la substance..	0,1592	0,2825
Trouvé : CO^2.........	0,3470	0,6169
id. H^2O........	0,1213	0,2120

			Calculé pour $C^{12}H^{19}AzO^{4}$
Soit C p. 100.........	59,44	59,55	59,75
id. H p. 100.........	8,46	8,34	7,89

DOSAGE DE L'AZOTE.

Poids de la substance..	0,1778	
AzH^{3} trouvée	0,01214	
Az id.	0,01	
Soit Az p. 100........	5,62	5,81

L'éther propylcyanosuccinique est le mononitrile correspondant à l'éther propyléthényltricarbonique déjà découvert par M. Waltz [1], $C^{3}H^{7}.C\begin{matrix} \diagup CO^{2}C^{2}H^{5} \\ \diagdown CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix}$; $|$ $CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5}$ il l'a préparé en traitant l'éther éthényltricarbonique sodé par de l'iodure de propyle. D'après cet auteur, ce produit bout en se décomposant un peu à 280°.

Propyléthényltricarbonate d'éthyle, $C^{3}H^{7}.C\begin{matrix} \diagup CO^{2}C^{2}H^{5} \\ \diagdown CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix}$. $|$ $CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5}$

Je l'ai préparé par l'action de l'acide chlorhydrique gazeux sur le propylcyanosuccinate d'éthyle, comme l'indique d'ailleurs l'équation suivante :

$$\begin{matrix} C^{3}H^{7}.C\begin{matrix} \diagup CAz \\ \diagdown CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix} \\ | \\ CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix} + C^{2}H^{5}OH + HCl + H^{2}O = AzH^{4}Cl + \begin{matrix} C^{3}H^{7}.C\begin{matrix} \diagup CO^{2}C^{2}H^{5} \\ \diagdown CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix} \\ | \\ CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5} \end{matrix}.$$

La réaction ne se fait que si l'on a soin d'opérer en tubes scellés à 100°. La tension développée dans les tubes est considérable. En chauffant à 100° dans ces conditions un mélange de 20 grammes de propylcyanosuccinate d'éthyle avec 100 grammes d'alcool absolu saturé d'acide chlorhydrique, on a obtenu au bout d'une dizaine d'heures un précipité de chlorhy-

[1] *Liebig's Annalen*, t. CCXIV, p. 58.

drate d'ammoniaque. Le mélange, retiré des tubes et traité, comme je l'ai déjà indiqué à propos de l'éthylcyanosuccinate d'éthyle, a fourni à la distillation, à une température de 208° environ, sous une pression de 0m06, un liquide de couleur ambrée, un peu fluorescent, qui, soumis à l'analyse, a donné les résultats suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Théorie pour $C^{14}H^{24}O^{6}$
Poids de la substance..	0,2839	
Trouvé : CO^2.........	0,6052	
id. H^2O.........	0,2044	
Soit C p. 100.........	58,13	58,33
id. H p. 100.........	8,00	8,33

Cette méthode ne m'a donné qu'un très faible rendement. Cet éther est de consistance huileuse, insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool et l'éther.

Allylcyanosuccinate d'éthyle, $C^3H^5.C\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}$, $|$ $CH^2.CO^2C^2H^5$

A 20 grammes d'éther cyanosuccinique sodé, on ajoute 16 gr. d'iodure d'allyle (point d'ébullition à 101°) et l'on chauffe le mélange au bain-marie, pendant trente heures environ, dans un ballon pourvu d'un réfrigérant ascendant. On a opéré comme précédemment et obtenu une solution éthérée qui a été desséchée sur du chlorure de calcium, puis distillée dans le vide relatif. Sous une pression de 0m035, à 207-210° (temp. corr.), il distille une huile incolore. Le rendement a été de 15 grammes environ.

Cette huile constitue l'allylcyanosuccinate d'éthyle, dont la formation est indiquée par l'équation suivante :

$$\begin{matrix}CNa\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}\\ |\\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + C^3H^5I = \begin{matrix}C^3H^5.C\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}\\ |\\ CH^2.CO^2C^2H^5\end{matrix} + NaI.$$

Les résultats fournis par l'analyse de ce composé sont les suivants :

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{12}H^{17}AzO^{4}$
Poids de la substance..	0,5089	0,7063	0,5303	
Trouvé : CO^{2}.........	1,1239	1,5481	1,1591	
id. $H^{2}O$..........	0,3611	0,4686	0,3592	
Soit C p. 100.........	60,23	59,77	59,61	60,25
id. H p. 100.........	7,88	7,37	7,52	7,11

DOSAGE D'AZOTE.

Poids de la substance..	0,2159	
AzH^{3} trouvée........	0,016028	
Az id.	0,0132	
Soit Az p. 100........	6,11	5,86

Cet éther est le mononitrile de l'éther allyléthényltricarbonique $C^{3}H^{5}.C\begin{matrix}\diagup CO^{2}C^{2}H^{5}\\ \diagdown CO^{2}C^{2}H^{5}\end{matrix}$ (avec $|CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5}$) obtenu par M. Hjelt (¹) en traitant l'éther éthényltricarbonique sodé par de l'iodure d'allyle.

Je ne crois pas devoir passer sous silence les essais infructueux que j'ai faits en vue de préparer un dérivé bromé d'addition de l'éther allylcyanosuccinique. J'ai traité une molécule de ce dernier composé par deux molécules de brome. Pour 20 grammes d'allylcyanosuccinate d'éthyle, il faut employer 13 gr. 38 de brome. L'addition de brome a été faite peu à peu et directement : le mélange produit une élévation de température tellement considérable qu'il est indispensable de refroidir le ballon pendant la durée de la réaction. Il a été chauffé au bain-marie ; il se dégage d'abondantes vapeurs d'acide bromhydrique. On a chauffé jusqu'à la disparition complète de ces vapeurs. Le produit de la réaction a été agité avec une solution de carbonate de soude, qui a précipité un liquide huileux, rougeâtre, qu'on a repris avec de l'éther. La

(¹) *Bericht. Deutsch. Chem. Ges.*, t. XVI, p. 333.

solution éthérée, qu'on n'arrive pas à décolorer par le charbon animal, a été déshydratée sur du chlorure de calcium, et soumise dans le vide à une évaporation prolongée. Vient-on à distiller ce produit, il se décompose. J'ai essayé de le faire cristalliser en le soumettant à des températures variant de —15 à —20° : il est devenu très visqueux, mais il ne s'est pas formé de cristaux.

J'ai fait de nombreuses analyses de ce produit; voici celles qui ont donné des résultats à peu près comparatifs :

DOSAGE DU BROME.

	I.	II.	III.	IV.
Poids de la substance.	0,5897	0,3753	0,3757	0,3285
AgBr trouvé	0,4339	0,2724	0,2589	0,2367
Br id.	0,184654823	0,115925268	0,110180073	0,100732419
Soit Br p. 100.......	31,31	30,89	29,32	30,66

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	III.
Poids de la substance.	0,3932	0,3354	0,4544
Trouvé : H^2O........	0,1861	0,1621	0,2033
id. CO^2........	0,6138	0,5231	0,6922
Soit H p. 100........	5,26	5,37	4,97
id. C p. 100........	42,57	42,53	41,54

Ces chiffres ne correspondent ni à un produit monobromé $C^{12}H^{16}BrAzO^4$ de substitution, ni au produit bibromé

$$CH^2.Br.CHBr.CH^2.\underset{\displaystyle CH^2.CO^2C^2H^5.}{\underset{|}{C}}\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2C^2H^5\end{matrix}\right.$$

En effet, la théorie exigerait :

	Pour $C^{12}H^{16}BrAzO^4=318$	et pour $C^{12}H^{17}Br^2AzO^4=399$
Br p. 100.....	25,08	40,10
C id.	45,28	36,09
H id.	5,03	4,26

Les résultats de l'analyse me laissent soupçonner que j'ai eu

affaire à un mélange des deux composés; c'est une réaction à reprendre en se plaçant dans de nouvelles conditions.

Nous venons de voir que l'hydrogène du groupe $CH\equiv$ de l'éther cyanosuccinique peut être remplacé par les radicaux des iodures alcooliques de la série grasse; on peut également lui substituer les radicaux des chlorures alcooliques de la série aromatique. C'est ainsi que j'ai préparé le benzylcyanosuccinate d'éthyle.

Benzylcyanosuccinate d'éthyle, $C^6H^5.CH^2.C\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}$ $\big|$ $CH^2.CO^2C^2H^5$.

11 gr. 40 de chlorure de benzyle rectifié (point d'ébullition 183°) ont été mélangés à 20 grammes d'éther cyanosuccinique sodé, et le tout a été chauffé au bain-marie et au réfrigérant ascendant, jusqu'à ce que le mélange, préalablement alcalin, fût devenu neutre au tournesol. On a ensuite évaporé pour chasser l'alcool; on a ajouté de l'eau qui a précipité un liquide huileux qui a été repris par de l'éther. Cette dernière solution, desséchée sur du chlorure de calcium, a été ensuite privée d'éther et distillée sous pression réduite. A 0m 02, à la température de 220-228°, il passe une huile très épaisse et légèrement jaunâtre. Cette huile constitue le benzylcyanosuccinate d'éthyle, qui se forme en vertu de l'équation suivante :

$$\underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{CNa\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}} + C^6H^5.CH^2Cl = \underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{C^6H^5.CH^2.C\begin{cases}CAz\\CO^2C^2H^5\end{cases}} + NaCl.$$

Ce produit donne à l'analyse les nombres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{16}H^{19}AzO^4$
Poids de la substance.	0,2264	0.3202	
Trouvé : CO^2........	0,5520	0,7780	
id. H^2O........	0,1445	0,2051	
Soit C p. 100........	66,49	66,26	66,43
id. H id.	7,09	7,12	6,57

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.		Calculé pour $C^{16}H^{19}AzO^{4}$
Poids de la substance.	0,1955	0,1417	0,2333	
AzH^{3} trouvée........	0,012142	0,008743	0,014711	
Az id.	0,01	0,0072	0,012115	
Soit Az p. 100.......	5,11	5,08	5,19	4,84

Pour 20 grammes de cyanosuccinate d'éthyle employé, on a obtenu un rendement de 18 grammes environ de benzylcyanosuccinate d'éthyle.

Cet éther n'a pas cristallisé, bien qu'ayant été soumis à différentes reprises à des températures variant de —15° à —20°. C'est le mononitrile du benzyléthényltricarbonate d'éthyle,

$$C^{7}H^{7}.C\begin{cases}CO^{2}C^{2}H^{5}\\CO^{2}C^{2}H^{5}\\CH^{2}.CO^{2}C^{2}H^{5}\end{cases}$$

, obtenu par MM. Bischoff et Mintz (1) en traitant l'éthényltricarbonate d'éthyle sodé par le chlorure de benzyle.

(1) *Berichte Deuts. Chem. Ges.*, t. XXIII, p. 653.

CHAPITRE II

Cyanosuccinate de méthyle. Cyanotricarballylate de méthyle.

Il résulte des recherches entreprises par M. Haller (communication particulière) que l'hydrogène du groupe CH^2 des éthers méthyliques des acides malonique, cyanacétique, acéto-acétique, benzoylacétique, possède un caractère plus acide que celui des éthers éthyliques correspondants. J'ai vérifié le fait avec le cyanacétate de méthyle et l'éther cyanosuccinique qui en dérive. Ces composés se prêtent beaucoup mieux aux substitutions que leur homologue supérieur.

Cyanosuccinate de méthyle, $CH \begin{cases} CAz \\ CO^2CH^3 \end{cases}$ | $CH^2.CO^2CH^3$

A 16 gr. 36 de cyanacétate de méthyle rectifié, dissous dans 20 grammes d'alcool méthylique, on ajoute 3 gr. 80 de sodium, en solution dans 100 grammes du même alcool. Le cyanacétate de méthyle sodé ainsi produit est chauffé au bain-marie vers 70°-75°, et au réfrigérant ascendant avec 17 gr. 80 de monochloracétate de méthyle (rectifié à 130°). On a chauffé tant que le mélange est demeuré alcalin, soit pendant cinq à six heures. On laisse refroidir; on ajoute de l'eau qui précipite une huile rougeâtre qu'on reprend par de l'éther. Ce dernier, déshydraté sur du chlorure de calcium, a été distillé au bain-marie d'abord, et le reste de la solution l'a été dans le vide relatif. Sous une pression de $0^m 045$, il passe, à 196°-204° (corr.), un liquide huileux, incolore, homogène. A partir de cette température, le liquide qui distille encore jaunit un peu, et à 215°-220° principalement il devient très épais.

Il arrive même souvent qu'il se concrète dans le tube abducteur et dans le récipient.

La partie qui distille de 196°-204° a été soigneusement rectifiée et analysée. Elle constitue le cyanosuccinate de méthyle, qui se forme en vertu de l'équation suivante :

$$CHNa\langle^{CAz}_{CO^2CH^3} + CH^2ClCO^2CH^3 = NaCl + \underset{CH^2.\,CO^2CH^3}{CH}\langle^{CAz}_{CO^2CH^3}.$$

Voici les résultats de l'analyse :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^7H^9AzO^4$.
Poids de la substance.	0,5395	0,3219	
Trouvé : CO^2........	0,9644	0,5826	
id. H^2O........	0,2734	0,1752	
Soit C p. 100........	48,75	49,36	49,12
id. H id.	5,63	6,05	5,26

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	Calculé
Poids de la substance.	0,5688	0,5958	
AzH^3 trouvée........	0,05695	0,0595	
Az id.	0,0469	0,0490	
Soit Az p. 100.......	8,25	8,22	8,19

Le cyanosuccinate de méthyle est un liquide huileux, incolore, insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool méthylique, l'alcool éthylique et les alcalis. Sa densité est de 1,2136 à 18°.

Cyanotricarballylate de méthyle, $\overset{CH^2.CO^2CH^3}{\underset{CH^2.CO^2CH^3}{C}}\langle^{CAz}_{CO^2CH^3}$.

Le produit qui, dans la préparation précédente distille, surtout à 215°-220°, sous une pression de 0m 045, cristallise très facilement. On le débarrasse du composé huileux qui le souille en l'étalant sur des plaques de porcelaine dégourdie et en le dissolvant ensuite dans l'alcool méthylique, d'où il se dépose en magnifiques cristaux.

Ces cristaux, soumis à l'analyse, ont donné les chiffres suivants :

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{10}H^{13}AzO^{6}$.
Poids de la substance.	0,3005	0,2784	0,2832	
Trouvé : CO^2........	0,5454	0,5025	0,5125	
id. H^2O........	0,1604	0,1467	0,1407	
Soit C p. 100........	49,49	49,23	49,35	49,38
id. H id.	5,93	5,85	5,51	5,35
	DOSAGE DE L'AZOTE.			
Poids de la substance.	0,2775	0,2521	0,2692	
AzH^3 trouvée........	0,0187	0,01785	0,0187	
Az id.	0,0154	0,0147	0,0154	
Soit Az p. 100.......	5,55	5,83	5,73	5,76

Cette formule répond bien à celle d'un cyanotricarballylate de méthyle, qui s'est formé en vertu d'une réaction analogue à celle qui donne naissance au cyanotricarballylate d'éthyle; le cyanosuccinate de méthyle, produit par l'action du monochloracétate de méthyle sur le cyanacétate de méthyle sodé, donne, avec l'éther sodé restant, du cyanosuccinate de méthyle sodé. A son tour, l'éther monochloracétique en excès forme avec ce dernier du cyanotricarballylate de méthyle.

Ces réactions successives peuvent d'ailleurs s'expliquer de la même façon que celles relatives au cyanosuccinate et au cyanotricarballylate d'éthyle.

Les équations suivantes en rendent compte :

$$(1)\quad \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CHNa.CO^2CH^3\end{array} + CH^2Cl.CO^2CH^3 = NaCl + \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CH.CO^2CH^3,\\ |\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CH.CO^2CH^3\\ |\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array} + \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CHNa.CO^2CH^3\end{array} = \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CH^2\text{-}CO^2CH^3\end{array} + \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CNa\text{-}CO^2CH^3,\\ |\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{l}CAz\\ \diagup\\ CNa\text{-}CO^2CH^3\\ |\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array} + CH^2Cl.CO^2CH^3 = NaCl + \begin{array}{l}CH^2.CO^2CH^3\\ |\diagup CAz\\ C\\ |\diagdown CO^2CH^3\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array}.$$

De l'ensemble de ces réactions, il résulte que la moitié seulement de l'éther cyanacétique mis en œuvre prend part à la formation des corps engendrés; l'expérience m'a en effet montré qu'on pouvait isoler par distillation fractionnée l'autre moitié de l'éther cyané.

Pour montrer d'ailleurs que les résultats sont bien d'accord avec la théorie, j'ai fait la synthèse du cyanotricarballylate de méthyle en traitant directement le cyanosuccinate de méthyle obtenu dans une préparation antérieure par de l'alcoolate de soude d'abord, puis par du monochloracétate de méthyle.

En effet, à 10 grammes de cyanosuccinate de méthyle (196°-204°) dissous dans 50 grammes d'alcool méthylique, on a ajouté 1 gr. 19 de sodium en solution dans 20 grammes du même alcool. Le mélange, additionné de 5 gr. 58 de monochloracétate de méthyle, a été chauffé au bain-marie, à 70° environ, pendant cinq à six heures, dans un ballon muni d'un réfrigérant ascendant. Le liquide, devenu neutre au tournesol, est additionné d'eau en excès qui précipite une huile rougeâtre qu'on a reprise par de l'éther. La solution éthérée, desséchée sur du chlorure de calcium, a été évaporée, puis distillée dans le vide relatif. Sous une pression de 0m 035 à 212° surtout, il passe un produit huileux qui ne tarde pas à cristalliser. Les cristaux, purifiés et soumis à l'analyse, ont donné les résultats suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{10}H^{13}AzO^{6}$
Poids de la substance..	0,2807	0,2312	
Trouvé : CO^2.........	0,5070	0,4173	
id. H^2O	0,1485	0,1155	
Soit C p. 100.........	49,25	49,22	49,38
id. H p. 100.........	5,88	5,55	5,35

DOSAGE DE L'AZOTE.

Poids de la substance..	0,2703	
AzH^3 trouvée	0,01785	
Az id.	0,0147	
Soit Az p. 100........	5,44	5,76

Le cyanotricarballylate de méthyle, obtenu par réaction secondaire dans la préparation du cyanosuccinate de méthyle, fond à 46°5; c'est aussi le point de fusion des cristaux obtenus synthétiquement. Ils se présentent l'un et l'autre en fort beaux cristaux prismatiques, solubles dans l'alcool méthylique, l'alcool éthylique, l'éther, et insolubles dans l'eau et les alcalis. Leur densité est de 1,3475 à +17° C. Dans le cas seulement où ils ne sont pas très nets, bien lavés, et lorsqu'ils contiennent un peu de l'huile avec laquelle ils sont mélangés dans une première distillation, ils se colorent, à la longue, en rose à la lumière. Dans ces conditions, l'agitation préalable de leur solution alcoolique avec du charbon animal lavé ne paraît pas avoir une bien grande influence sur la décoloration de cette solution rougeâtre. Les cristaux provenant de cette liqueur ne s'obtiennent incolores que par une série de cristallisations. Leur solution alcoolique ne colore pas les persels de fer. Les cristaux ont des faces plus nettes que celles de l'homologue supérieur.

Voici leurs mesures effectuées par M. Goguel :

PROPRIÉTÉS CRISTALLOGRAPHIQUES.

« Ce corps se présente en cristaux monocliniques assez volumineux. Ils peuvent atteindre un centimètre. Les figures ci-contre donnent une idée de leurs formes. Dans les gros cristaux *(fig. 1)*, ce sont les faces $e^{\frac{1}{2}}$ et quelquefois h^1 qui dominent; dans les petits cristaux, h^1 est plus rare, et les faces de la zone g^1 $b^{\frac{1}{2}}$ relativement plus importantes *(fig. 1)*. La projection stéréographique ci-contre *(fig. 2)* représente toutes les faces observées avec quelque certitude.

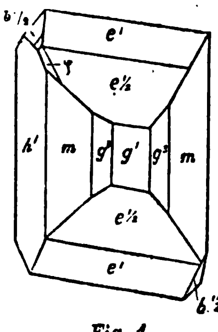


Fig. 1.

» La notation adoptée est celle qui donne pour toutes les faces les symboles les plus simples.

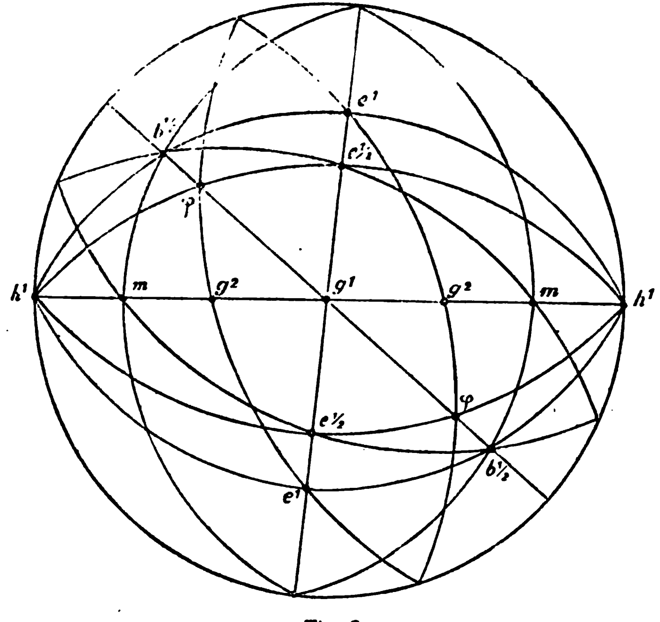


Fig. 2.

» Les faces sont en général brillantes dans les petits cristaux et donnent d'assez bonnes mesures, dont voici le tableau :

		Angles des normales.	
		Mesurés.	Calculés.
g^1g^2	(010) (130)	42° 21′	42° 26′
g^1m	(010) (110)	69° 58′ *	
g^2m	(130) (110)	27° 38′	27° 32′
mm sur h^1	(110) ($1\bar{1}0$)	40° 8′	40° 8′
$e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$	(021) ($0\bar{2}1$)	84° 26′	
$g^1e^{\frac{1}{2}}$	(010) (021)	47° 57′ *	
$e^1e^{\frac{1}{2}}$	(011) (021)	17° 35′	17° 46′
e^1e^1 sur p	(011) ($0\bar{1}1$)	48° 14′	
$me^{\frac{1}{2}}$ sur d	(110) (021)	72° 27′ *	
$b^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$	($\bar{1}11$) (021)	52° 40′	
$b^{\frac{1}{2}}m$	($\bar{1}11$) ($\bar{1}10$)	39° 13′	
$b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$	($\bar{1}11$) ($\bar{1}\bar{1}1$)	33° 28′	
$g^1b^{\frac{1}{2}}$	($\bar{1}11$) (010)	73° 14′	

$m\,\varphi$	$(\bar{1}10)\,(\bar{1}21)$	38° 4′
$e^1\,\varphi$	$(011)\,(\bar{1}21)$	48° 39′
$h^1\,\varphi$	$(\bar{1}00)\,(\bar{1}21)$	49° 13′
$e^{\frac{1}{2}}\,\varphi$	$(021)\,(\bar{1}21)$	34° 40′

» Ce qui conduit à

$$a : b : c :: 0{,}4534 : 1 : 0{,}3665$$
$$xz = ph^1 = 84°5'\,30''.$$

» Ces cristaux présentent un clivage très imparfait suivant h^1. A cause de leur fragilité, il est très difficile de les tailler pour observer leurs propriétés optiques. Toutefois, on peut constater deux axes optiques très écartés situés dans g^1, l'un d'eux presque normal à h^1. »

Méthylcyanosuccinate de méthyle, $CH^3.C\begin{cases}CAz \\ CO^2CH^3\end{cases}$, avec $|$ $CH^2.CO^2CH^3$.

De même que, dans le cyanosuccinate d'éthyle, l'hydrogène restant du méthane peut être remplacé par des radicaux d'iodures alcooliques, de même on retrouve cette propriété dans le cyanosuccinate de méthyle. Je me suis borné à obtenir le méthylcyanosuccinate de méthyle. La méthode employée a été celle décrite plus haut, et qui m'a servi à obtenir les éthers substitués de la série éthylique.

A 20 grammes de cyanosuccinate de méthyle dissous dans 60 grammes d'alcool méthylique, on ajoute une solution de 2 gr. 38 de sodium dans 40 grammes du même alcool. Au mélange, on a ajouté 17 gr. 60 d'iodure de méthyle rectifié; pendant cinq heures on a chauffé au réfrigérant ascendant à une température de 70°-75°. A une température plus élevée, il se fait des soubresauts dans le ballon. On distille l'alcool méthylique; le résidu est additionné d'eau qui précipite une huile épaisse, rougeâtre, qui a été dissoute dans l'éther. Ce dernier, desséché sur du chlorure de calcium, est évaporé, puis distillé dans le vide relatif. Sous une pression de 0m06 vers 195°, on a recueilli un

liquide huileux, incolore et homogène, qui, rectifié et soumis à l'analyse, a donné les chiffres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Théorie pour $C^8H^{11}AzO^4$.
Poids de la substance.	0,4599	
Trouvé : H^2O........	0,2628	
id. CO^2........	0,8767	
Soit H p. 100........	6,35	5,95
id. C id.	51,98	51,89

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	Calculé.
Poids de la substance.	0,6735	0,3668	
AzH^3 trouvée........	0,0612	0,034	
Az id.	0,0504	0,028	
Soit Az p. 100.......	7,48	7,63	7,56

Ces chiffres correspondent à la formule du méthylcyanosuccinate de méthyle qui se forme en vertu de la réaction suivante :

$$\begin{array}{l}CNa\left\langle\begin{array}{l}CAz\\CO^2CH^3\end{array}\right.\\ \vert\\ CH^2.CO^2CH^3\end{array} + CH^3I = \begin{array}{l}CH^3.C\left\langle\begin{array}{l}CAz\\CO^2CH^3\end{array}\right.\\ \quad\quad\ \vert\\ \quad\quad\ CH^2.CO^2CH^3\end{array} + NaI.$$

J'ai obtenu incidemment plus haut (p. 9) un composé identique en cherchant à obtenir le méthylcyanosuccinate d'éthyle par l'action de l'iodure de méthyle sur le cyanosuccinate d'éthyle sodé. Mais comme j'avais opéré au sein de l'alcool méthylique, le produit formé a été le méthylcyanosuccinate de méthyle.

Dans le cours de ces recherches, ce n'est pas le seul exemple que j'aie remarqué de ces substitutions de radicaux alcooliques. Je vais en montrer d'autres fort intéressantes et qui viennent confirmer à ce sujet les remarques des auteurs que j'ai cités plus haut à propos de la préparation du méthylcyanosuccinate d'éthyle.

Éther méthyléthényltricarbonique, $CH^3.C(CO^2CH^3)(CO^2CH^3)-CH^2.CO^2CH^3$.

J'ai saponifié la fonction nitrile du méthylcyanosuccinate de méthyle obtenu précédemment, au moyen de l'acide chlorhydrique gazeux. A 10 grammes du composé, on a ajouté 50 grammes d'alcool méthylique saturé d'acide chlorhydrique. Comme après quinze jours de repos il ne s'était pas encore formé de cristaux de chlorhydrate d'ammoniaque, on a chauffé le mélange en tubes scellés vers 70°-80°. Au bout d'une heure, il y avait dans les tubes un abondant dépôt de cristaux. L'alcool et l'acide chlorhydrique en excès ont été chassés au bain-marie. Le résidu, additionné d'eau, a abandonné un liquide huileux, jaunâtre, qui a été dissous dans de l'éther. Ce dernier, lavé avec une solution de carbonate de soude, puis déshydraté sur du chlorure de calcium, a été évaporé et enfin distillé dans le vide relatif. Sous une pression de 0^m05 à 217° environ, il passe un liquide huileux, incolore, privé d'azote, qui constitue le méthyléthényltricarbonate de méthyle. La formation de ce corps est expliquée par l'équation suivante :

$$CH^3.C(CAz)(CO^2CH^3)-CH^2.CO^2CH^3 + CH^3OH + HCl + H^2O = AzH^4Cl + CH^3.C(CO^2CH^3)(CO^2CH^3)-CH^2.CO^2CH^3.$$

En effet, l'analyse a donné les chiffres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Théorie pour $C^9H^{14}O^6$.
Poids de la substance..	0,2692	
Trouvé : CO^2.........	0,4890	
id. H^2O.........	0,1654	
Soit C p. 100.........	49,54	49,54
id. H id.	6,83	6,42

J'ai cherché à préparer le *cyanosuccinate de méthyle-éthyle*,

$CH\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix}$, en suivant la méthode générale. Je n'ai pas obtenu
$\mid$
$CH^2.CO^2CH^3$

ce composé; à sa place il s'est toujours formé du cyanosuccinate de méthyle ou du cyanosuccinate d'éthyle et, par réaction secondaire, du cyanotricarballylate de méthyle ou du cyanotricarballylate d'éthyle, suivant qu'on opérait au sein de l'alcool méthylique ou de l'alcool éthylique.

I. *Action du monochloracétate d'éthyle sur le cyanacétate de méthyle sodé en présence de l'alcool méthylique.*

Cyanosuccinate de méthyle.

Dans ces conditions, il semblerait que l'on dût obtenir l'éther
$CH\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix}$, ainsi que le montre l'équation suivante :
$\mid$
$CH^2.CO^2C^2H^5$

$$CHNa\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix} + CH^2Cl.CO^2C^2H^5 = NaCl + \begin{matrix} CH\begin{smallmatrix}\diagup CAz \\ \diagdown CO^2CH^3\end{smallmatrix} \\ \mid \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{matrix}$$

A 3 gr. 80 de sodium dissous dans 100 grammes d'alcool méthylique, on a ajouté 16 gr. 36 de cyanacétate de méthyle, puis 20 gr. 85 de monochloracétate d'éthyle. On a opéré comme précédemment. Sous une pression de 0^m03, on a recueilli le produit huileux qui distille à 190° environ. Ce produit, rectifié et analysé, a donné les nombres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

			Calculé pour $C^7H^9AzO^4$.
Poids de la substance.	0,3874	0,3611	
Trouvé : CO^2........	0,6944	0,6502	
id. H^2O........	0,2043	0,1965	
Soit C p. 100........	48,88	49,10	49,12
id. H id.	5,86	6,05	5,26

DOSAGE DE L'AZOTE.

		Calculé pour $C^7H^8AzO^4$
Poids de la substance.	0,5255	
AzH^3 trouvée	0,049325	
Az id.	0,040621	
Soit Az p. 100.......	7,73	8,19

Ces chiffres correspondent à la formule du cyanosuccinate de méthyle. De plus, les cristaux obtenus par cristallisation du liquide qui a distillé au delà de 200° sont des cristaux de cyanotricarballylate de méthyle, car ils fondent à la température de 46°5.

Par conséquent, en faisant agir le monochloracétate d'éthyle sur le cyanacétate de méthyle sodé en présence de l'alcool méthylique, on obtient du cyanacétate de méthyle et du cyanotricarballylate de méthyle.

II. *Action du monochloracétate de méthyle sur le cyanacétate d'éthyle sodé en présence de l'alcool éthylique.*

Cyanosuccinate d'éthyle.

Théoriquement on devrait obtenir le composé $\begin{matrix} CH\langle \begin{matrix} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{matrix} \\ | \\ CH^2.CO^2CH^3 \end{matrix}$, ce qu'exprime l'équation ci-dessous :

$$CHNa\langle \begin{matrix} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{matrix} + CH^2Cl.CO^2CH^3 = NaCl + \begin{matrix} CH\langle \begin{matrix} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{matrix} \\ | \\ CH^2.CO^2CH^3 \end{matrix}.$$

En opérant sur les quantités théoriques indiquées par cette équation, le sodium ayant été dissous dans de l'alcool absolu et avec les précautions ordinaires, on obtient d'abord, vers 160° principalement, sous une pression de 0^{m}025, un produit huileux, incolore, et au delà de 200°, un liquide très épais qui cristallise très facilement. Le produit qui distille vers 160° est du cyano-

succinate d'éthyle, car, à l'analyse, il donne les chiffres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Calculé pour $C^9H^{13}AzO^4$
Poids de la substance..	0,3378	
Trouvé : CO^2.........	0,6745	
id. H^2O.........	0,2074	
Soit C p. 100.........	54,45	54,27
id. H p. 100.........	6,82	6,53

DOSAGE DE L'AZOTE.

Poids de la substance..	0,4363	
AzH^3 trouvée	0,03655	
Az id.	0,0301	
Soit Az p. 100........	6,90	7,03

Quant aux cristaux provenant du liquide qui distille au delà de 200°, ils fondent à 40°-40°5; ce sont des cristaux de cyanotricarballylate d'éthyle.

Donc, dans cette préparation, le remplacement de l'H de CH par le groupement négatif $CH^2.CO^2CH^3$, substitution prévue par la théorie, ne s'est pas produit, parce que l'on a opéré au sein de l'alcool éthylique. C'est là un exemple de remplacement du radical *méthyle* par le radical *éthyle*.

III. *Action du monochloracétate d'éthyle sur le cyanacétate de méthyle sodé au sein de l'alcool éthylique.*

Cyanosuccinate d'éthyle.

L'équation ci-dessous montre que l'on devrait obtenir le composé $\underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{CH}\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2CH^3\end{matrix}\right.$; en effet :

$$CHNa\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2CH^3\end{matrix}\right. + CH^2Cl.CO^2C^2H^5 = NaCl + \underset{CH^2.CO^2C^2H^5}{CH}\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2CH^3\end{matrix}\right. .$$

10 gr. 15 de sodium ont été dissous dans 250 grammes d'alcool absolu, et à la solution on a ajouté 43 gr. 60 de cyanacétate de méthyle. Le mélange a été additionné de 54 grammes de monochloracétate d'éthyle. Le tout a été chauffé au bain-marie et au réfrigérant ascendant pendant quatre heures. Le produit, traité alors comme précédemment, a fourni à la distillation, sous pression réduite à 0m015, à la température de 160°-170°, un liquide huileux qui, rectifié et soumis à l'analyse, a fourni les résultats suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Calculé pour $C^9H^{13}AzO^4$
Poids de la substance..	0,3320	
Trouvé : CO^2.........	0,6582	
id. H^2O........	0,2039	
Soit C p. 100.........	54,06	54,27
id. H p. 100.........	,82	6,53

DOSAGE DE L'AZOTE.

Substance...........	0,3473	
AzH^3 trouvée........	0,02805	
Az id.	0,0231	
Soit Az p. 100........	6,65	7,03

Ces chiffres correspondent à la formule du cyanosuccinate d'éthyle. Au delà de 160°-170°, dans cette même préparation, le liquide continue à distiller, mais surtout après 210°, en fournissant une huile qui s'est concrétée dans le récipient. Les cristaux, purifiés par une nouvelle cristallisation, fondent à 40°, comme ceux du cyanotricarballylate d'éthyle. La seule remarque que l'on puisse faire au sujet de ces cristaux, c'est qu'en cristallisant, ils n'affectent pas autant que les premiers la forme de mâcles, mais bien celles de prismes allongés, isolés; ils sont, par suite, plus faciles à mesurer.

C'est là un nouvel exemple de substitution du radical *éthyle* au radical *méthyle*.

Il est donc intéressant d'observer, à propos de ces dernières synthèses, et de la préparation du méthylcyanosuccinate d'éthyle que, suivant que l'on opère au sein de l'alcool méthylique ou au sein de l'alcool éthylique, on obtient des dérivés méthylés ou éthylés.

CHAPITRE III

Action de l'éther monobromopropionique-α, sur le cyanacétate et le cyanosuccinate d'éthyle sodés.

La facilité avec laquelle le cyanacétate d'éthyle et le cyanosuccinate d'éthyle se prêtent aux synthèses, m'a engagé à généraliser les résultats obtenus, et à essayer de substituer à l'hydrogène du groupe CH de ces deux composés de nouveaux radicaux.

J'aurais pu tout aussi bien opérer avec les cyanacétate et cyanosuccinate de méthyle; on peut aisément prévoir la quantité de corps nouveaux qu'il m'eût été facile de préparer. Je me suis contenté, pour le moment, d'opérer quelques substitutions dans la série éthylique.

I. *Action de l'éther monobromopropionique-α sur le cyanacétate d'éthyle sodé.*

Éther propenylcyanodicarbonique, ou β-méthyl-cyanosuccinique,

$$\begin{array}{l} CH\left\langle \begin{array}{l} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{array} \right. \\ \;| \\ CH^3.CH.CO^2.C^2H^5 \end{array}$$

20 grammes de cyanacétate d'éthyle sodé, obtenus en dissolvant 3 gr. 40 de sodium dans 100 grammes d'alcool absolu, et en ajoutant à ce mélange 16 gr. 74 de cyanacétate d'éthyle, sont additionnés de 26 gr. 80 d'éther α-monobromopropionique rectifié. Il se produit presque aussitôt un précipité blanc abondant en même temps qu'un léger échauffement du liquide. Le mélange alcalin est chauffé au bain-marie, dans un ballon muni d'un réfrigérant ascendant, pendant neuf heures; il se fait un précipité de bromure de sodium. On pourrait tout aussi bien, comme je

l'ai essayé, chauffer à 100° en tubes scellés, ou au bain de sable. Mais si, dans ces dernières conditions, on abrège la durée de l'opération, on n'augmente pas le rendement d'une façon sensible. On filtre pour séparer le bromure de sodium; l'alcool est distillé : le produit restant est additionné d'eau qui précipite une huile rougeâtre qui est reprise par l'éther. Ce dernier, mis à dessécher sur du chlorure de calcium, est alors distillé dans le vide relatif.

Sous une pression de 0m 025 à 164°, il commence à distiller un liquide jusqu'à 174°; puis, à 185° jusqu'à 215°, il passe un liquide huileux très épais.

Le liquide qui distille de 164° à 174° a été rectifié; on a recueilli la portion qui passe à 167°-168°, où il y a un point fixe, et on l'a soumise à l'analyse. Celle-ci a fourni des nombres qui correspondent à la formule de l'éther propenylcyanodicarbonique, formé en vertu de la réaction suivante :

$$CHNa\left\langle\begin{matrix}CAz\\ CO^2C^2H^5\end{matrix}\right. + CH^3.CHBr.CO^2C^2H^5 = \begin{matrix}CH\left\langle\begin{matrix}CAz\\ CO^2C^2H^5\end{matrix}\right.\\ |\\ CH^3.CH.CO^2C^2H^5.\end{matrix} + NaBr.$$

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{10}H^{15}AzO^4$.
Poids de la substance.	0,3674	0,3282	0,3365	
Trouvé : CO^2........	0,7608	0,6768	0,6906	
id. H^2O........	0,2430	0,2164	0,2164	
Soit C p. 100........	56,48	56,24	55,97	56,34
id. H id.	7,34	7,33	7,14	7,04

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	III.	
Substance..........	0,4476	0,4079	0,6932	
AzH^3 trouvée.......	0,03485	0,03145	0,05524	
Az id.	0,0287	0,0259	0,0455	
Soit Az p. 100.......	6,41	6,35	6,56	6,57

Quant au liquide qui distille au delà de 185°, il a également été rectifié : il distille surtout à 204°-207°. Par analogie avec ce qui

se passe dans la préparation des cyanosuccinates d'éthyle et de méthyle, j'ai pensé qu'il pouvait se former ici aussi, par réaction secondaire, du **diméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique.** Les équations suivantes permettent de se rendre compte de cette formation :

(1) $$CHNa\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5} + CH^3.CHBr.CO^2C^2H^5 = NaBr + \underset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{CH}\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5}.$$

(2) $$\underset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{CH}\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5} + CHNa\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5} = \underset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{CNa}\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5} + CH^2\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5}.$$

(3) $$\underset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{CNa}\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5} + CH^3.CHBr.CO^2C^2H^5 = NaBr + \overset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{\underset{CH^3.CH.CO^2C^2H^5}{C}}\langle^{CAz}_{CO^2C^2H^5}.$$

L'équation (1) montre la production de l'éther propenylcyanodicarbonique.

L'équation (2) explique que l'éther cyanacétique sodé restant, en réagissant sur le propenylcyanodicarbonate d'éthyle, fournit le même composé sodé.

D'après l'équation (3), l'éther propenylcyanodicarbonique sodé, subissant l'action de α-monobromopropionate d'éthyle, fournit le dyméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique.

Le produit huileux recueilli à 204°-207°, sous une pression de $0^m\,025$, a fourni à l'analyse des chiffres qui répondent à la composition du diméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique.

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{15}H^{23}AzO^6$.
Poids de la substance.	0,4826	0,2990	
Trouvé : H^2O........	0,3232	0,2098	
id. CO^2........	1,0143	0,6242	
Soit H p. 100........	7,44	7,79	7,35
id. C id.	57,32	56,93	57,51

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{15}H^{23}AzO^{6}$
Substance..........	0,3356	0,4119	
AzH^{3} trouvée......	0,0204	0,02465	
Az id..........	0,0168	0,0203	
Soit Az p. 100.......	5,01	4,92	4,47

D'ailleurs, pour confirmer les résultats, j'ai réalisé la synthèse du diméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique en traitant l'éther propenylcyanodicarbonique sodé, obtenu dans la préparation précédente par l'α-bromopropionate d'éthyle, ce que montre l'équation suivante :

$$\begin{array}{l} CNa\left\langle\begin{array}{l}CAz\\ CO^{2}C^{2}H^{5}\end{array}\right. \\ | \\ CH^{3}.CH.CO^{2}C^{2}H^{5} \end{array} + CH^{3}.CHBr.CO^{2}C^{2}H^{5} = \begin{array}{l} CH^{3}.CH.CO^{2}C^{2}H^{5} \\ | \\ C\left\langle\begin{array}{l}CAz\\ CO^{2}C^{2}H^{5}\end{array}\right. \\ | \\ CH^{3}.CH.CO^{2}C^{2}H^{5} \end{array} + NaBr.$$

15 grammes d'éther propenylcyanodicarbonique sodé (obtenu avec 13 gr. 60 d'éther propenylcyanodicarbonique mélangé avec une solution de 1 gr. 46 de sodium dans 60 grammes d'alcool absolu) ont été traités par 11 gr. 55 d'α-bromopropionate d'éthyle. Le mélange a été chauffé au bain-marie et au réfrigérant ascendant pendant huit heures. On a terminé l'opération comme plus haut. Le liquide recueilli à 204°-210°, sous une pression de 0m 025, et soumis à l'analyse, a donné les chiffres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{15}H^{23}AzO^{6}$
Poids de la substance..	0,3524	0,4302	
Trouvé : $H^{2}O$	0,2487	0,2938	
id. CO^{2}	0,7447	0,9082	
Soit H p. 100.........	7,84	7,59	7,35
id. C p. 100..........	57,63	57,58	57,51

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	Calculé
Substance...........	0,4802	0,3638	
AzH^{3} trouvée	0,02465	0,0187	
Az id.	0,0203	0,0154	
Soit Az p. 100........	4,23	4,23	4,47

J'ai essayé de faire cristalliser le diméthylcyanotricarballylate d'éthyle : je l'ai soumis à diverses reprises à des températures variant de — 15° à — 20°. Je l'ai abandonné pendant plusieurs semaines sous la cloche à dessiccation et dans le vide; il m'a été impossible d'obtenir des cristaux. Il constitue un liquide incolore, très épais, insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool, l'éther et les alcalis.

Action de l'acide chlorhydrique sur l'éther propenylcyanodicarbonique.

Éther propenyltricarbonique, $CH\langle{}^{CO^2C^2H^5}_{CO^2C^2H^5}$; $CH^3.CH.CO^2C^2H^5$

J'ai saponifié la fonction nitrile de l'éther propenylcyanodicarbonique, au moyen de l'acide chlorhydrique gazeux. Pour cela, j'ai fait dissoudre 17 grammes de propenylcyanodicarbonate d'éthyle dans 100 grammes d'alcool absolu. Dans la solution, j'ai fait passer à refus un courant de gaz acide chlorhydrique. On a abandonné au repos pendant une dizaine de jours; au bout de ce temps, il s'est déposé d'abondants cristaux de chlorhydrate d'ammoniaque. On a chassé au bain-marie l'alcool et l'acide chlorhydrique. Le résidu additionné d'eau a précipité une huile qu'on a reprise avec de l'éther. Ce dernier, lavé avec une solution de carbonate de soude, a été desséché sur du chlorure de calcium, évaporé, puis distillé dans le vide relatif. Sous une pression de 0m 06, on a recueilli à 190°-191° surtout un liquide huileux, incolore, qui constitue l'éther propenyltricarbonique.

En effet, ce produit rectifié, qui ne contient d'ailleurs pas d'azote, a fourni à l'analyse les chiffres suivants :

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{12}H^{20}O^6$
Poids de la substance..	0,4014	0,3775	0,3840	
Trouvé : H^2O.........	0,2690	0,2680	0,2759	
id. CO^2	0,8051	0,7654	0,7803	
Soit H p. 100	7,45	7,89	7,98	7,69
id. C p. 100.........	54,70	55,29	55,42	55,38

20 grammes d'éther propenylcyanodicarbonique ont fourni 10 à 12 grammes d'éther propenyltricarbonique, qui se forme comme l'indique l'équation suivante :

$$\begin{matrix} CH\langle{}^{CAz}_{CO^2C^2H^5} \\ | \\ CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \end{matrix} + C^2H^5OH + HCl + H^2O = AzH^4Cl + \begin{matrix} CH\langle{}^{CO^2C^2H^5}_{CO^2C^2H^5} \\ | \\ CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \end{matrix}.$$

Cet éther distille à 192°6 (corr.) sous une pression de 0^m 06. Il a été déjà obtenu par M. Bischoff (1) en traitant l'éther malonique sodé par l'éther α-monobromopropionique (distillé à 160°-165°). Il lui a assigné, comme point d'ébullition à la pression ordinaire, 270°3.

II. *Action de l'éther monobromopropionique-α sur le cyanosuccinate d'éthyle sodé.*

Éther méthylcyanotricarballylique,
$$\begin{matrix} CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ C\langle{}^{CAz}_{CO^2C^2H^5} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{matrix}.$$

33 gr. 30 de cyanosuccinate d'éthyle ont été mélangés à une solution de 3 gr. 46 de sodium, dissous dans 100 grammes d'alcool absolu. On a ensuite ajouté 24 gr. 60 d'α-monobromopropionate d'éthyle, et l'on a chauffé au bain de sable et au réfrigérant ascendant le mélange alcalin, jusqu'à ce qu'il soit devenu neutre au tournesol. Douze heures ont suffi pour cette opération, qui demande beaucoup plus de temps si l'on opère au bain-marie. Le produit isolé du bromure de sodium qui s'est formé a été traité par la méthode ordinaire; la solution obtenue, soumise à la distillation dans le vide relatif, a donné, sous une pression de 0^m 03 à 217°-219° principalement, un liquide incolore très épais, qui continue à passer jusqu'à 226°, en prenant une légère teinte ambrée.

Le liquide qui distille de 217°-219° a été rectifié et analysé. On a obtenu des résultats qui conduisent à la formule de l'éther

(1) *Annalen der Chem., Justus Liebig's*, t. CCXIV, p. 38.

méthylcyanotricarballylique, qui se forme en vertu de la réaction suivante :

$$\begin{matrix} CNa\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2C^2H^5\end{matrix}\right. \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{matrix} + CH^3.CHBr.CO^2C^2H^5 = NaBr + \begin{matrix} CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ C\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2C^2H^5\end{matrix}\right. \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{matrix}$$

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	Calculé pour $C^{14}H^{21}AzO^6$
Poids de la substance..	0,3441	0,5084	
Trouvé : H^2O	0,2242	0,3325	
id. CO^2.........	0,7047	1,0498	
Soit H p. 100.........	7,24	7,26	7,02
id. C p. 100.........	55,85	56,32	56,19

DOSAGE DE L'AZOTE.

Substance	0,3779	0,3912	
AzH^3 trouvée.........	0,02295	0,02125	
Az id.	0,0189	0,0175	
Soit Az p. 100.........	5,00	4,47	4,68

Le méthylcyanotricarballylate d'éthyle se prépare aisément. 20 grammes de cyanosuccinate d'éthyle en ont donné de 30 à 32 grammes. Son point d'ébullition corrigé est de 219°5 à 221°5 à 0m03. Il est insoluble dans l'eau, mais soluble dans l'éther, l'alcool et les alcalis.

J'ai obtenu le méthylcyanotricarballylate d'éthyle *par une autre méthode*, en partant de l'éther propenylcyanodicarbonique sodé, sur lequel j'ai fait agir l'éther monochloracétique. Cette réaction est exprimée par l'équation suivante

$$\begin{matrix} CNa\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2C^2H^5\end{matrix}\right. \\ | \\ CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \end{matrix} + CH^2Cl.CO^2C^2H^5 = \begin{matrix} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ C\left\langle\begin{matrix}CAz\\CO^2C^2H^5\end{matrix}\right. \\ | \\ CH^3.CH.CO^2C^2H^5 \end{matrix} + NaCl.$$

A 20 grammes d'éther propenylcyanodicarbonique sodé obtenu en ajoutant une solution de 2 gr. 0 de sodium dans 100 grammes

d'alcool absolu à 18 grammes d'éther propenylcyanodicarbonique, on mélange 10 gr. 40 de monochloracétate d'éthyle : il a suffi de chauffer dix heures. Après le traitement habituel, on a distillé le liquide éthéré anhydre, et on a recueilli le produit qui passe à la température de 218°-221°, sous une pression de 0m03. On l'a soumis à l'analyse.

Les chiffres obtenus correspondent à ceux de l'éther méthylcyanotricarballylique.

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

		Calculé pour $C^{14}H^{11}AzO^{8}$
Poids de la substance..	0,5727	
Trouvé : $H^{2}O$	0,3687	
id. CO^{2}..........	1,1738	
Soit H p. 100..........	7,15	7,02
id. C p. 100..........	55,90	56,19

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	
Poids de la substance..	0,4402	0,4224	
AzH^{3} trouvée..........	0,02635	0,0255	
Az id.	0,0217	0,021	
Soit Az p. 100........	4,92	4,97	4,68

Il est à noter que le rendement obtenu par cette méthode est plus faible que celui obtenu précédemment. 10 grammes d'éther propenylcyanodicarbonique n'ont donné que 8 à 10 grammes du composé. Encore la réaction ne se fait bien que si l'on chauffe en tubes scellés à 100°.

Après l'éther monobromopropionique-α, j'ai eu l'idée de faire agir le monobromosuccinate d'éthyle sur l'éther cyanacétique sodé.

Action de l'éther monobromosuccinique sur l'éther cyanacétique sodé.

$$\text{Éther } \alpha\text{-cyanotricarballylique,}\quad \begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH\left\langle \begin{array}{l} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{array}\right. \end{array}$$

3 gr. 40 de sodium ont été dissous dans 100 grammes d'alcool absolu, et additionnés de 16 gr. 74 de cyanacétate d'éthyle. Au mélange, on a ajouté 37 gr. 48 d'éther monobromosuccinique rectifié (à la pression ordinaire, il distille à 225°-226° ou à la température de 171° à 0m06); il se fait une élévation notable de température, en même temps qu'un abondant précipité blanc. On a chauffé pendant vingt heures et au réfrigérant ascendant. Le produit séparé du bromure de sodium qui s'est produit a été traité par la méthode habituelle. La distillation a été faite dans le vide relatif, sous une pression de 0m02. A 195°-197° passe la majeure partie d'un liquide qui a été rectifié et soumis à l'analyse. Les chiffres fournis correspondent à ceux de l'éther α-cyanotricarballylique qui s'est formé en vertu de la réaction suivante :

$$CNa\left\langle \begin{array}{l} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{array}\right. + \begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CHBr.CO^2C^2H^5 \end{array} = NaBr + \begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH\left\langle \begin{array}{l} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{array}\right. \end{array}.$$

DOSAGE DU CARBONE ET DE L'HYDROGÈNE.

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{13}H^{19}AzO^6$.
Poids de la substance.	0,4397	0,3288	0,3764	
Trouvé : H^2O........	0,2884	0,2021	0,2387	
id. CO^2........	0,8838	0,6526	0,7549	
Soit H p. 100........	7,29	6,83	7,04	6,66
id. C id.	54,82	54,14	54,70	54,74

DOSAGE DE L'AZOTE.

	I.	II.	III.	Calculé pour $C^{13}H^{19}AzO^6$
Poids de la substance.	0,3370	0,4994	0,4312	
AzH^3 trouvée........	0,0204	0,02975	0,0255	
Az id.	0,0168	0,0245	0,021	
Soit Az p. 100........	4,98	4,92	4,87	4,91

On a obtenu dans cette préparation 25 grammes environ d'éther α-cyanotricarballylique.

Cet éther est insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool, l'éther et les alcalis. Son point d'ébullition corrigé est de 196°8 à 198°8, sous une pression de 0^m02.

J'ai fait agir l'éther monobromosuccinique sur le cyanosuccinate d'éthyle sodé, en vue d'obtenir le composé

$$\begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ C\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array}$$

qui devait se former comme l'indique l'équation suivante :

$$\begin{array}{l} CNa\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array} + \begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CHBr.CO^2C^2H^5 \end{array} = \begin{array}{l} CH^2.CO^2C^2H^5 \\ | \\ CH.CO^2C^2H^5 \\ | \\ C\begin{cases} CAz \\ CO^2C^2H^5 \end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2C^2H^5 \end{array} + NaBr.$$

A cet effet, j'ai fait dissoudre 2 gr. 30 de sodium dans 70 grammes d'alcool absolu, et ajouté à la solution 20 grammes d'éther cyanosuccinique. Le mélange a été additionné de 22 gr. 90 d'éther monobromosuccinique. Il se produit une très grande élévation de température, qui va même jusqu'à l'ébullition de l'alcool si l'on n'a pas soin de refroidir le récipient. En même temps la liqueur prend une teinte jaune orange. On a chauffé pendant une vingtaine d'heures au bain-marie et au réfrigérant ascendant. On a traité comme plus haut et obtenu une petite

quantité de bromure de sodium. Le liquide éthéré résultant des opérations a été distillé dans le vide relatif, sous une pression de $0^{m}06$. Il a commencé à distiller à partir de 125° environ et jusqu'à 230°, sans qu'on ait remarqué d'arrêt sensible dans la marche ascendante du thermomètre. Plusieurs rectifications successives ne m'ont pas donné de meilleurs résultats. Néanmoins, j'ai soumis à l'analyse les portions recueillies de 185°-195° et de 210°-215°. Les résultats obtenus s'éloignaient sensiblement des chiffres théoriques. J'ai dû abandonner momentanément la préparation de ce corps. On aurait pu, il est vrai, saponifier le produit brut de la réaction, qui donnerait probablement, outre le mélange des composants en excès, les acides

$$\begin{array}{l} CH^2.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ C \begin{cases} CO^2H \\ CO^2H \end{cases} \\ | \\ CH^2.CO^2H \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} CH^2.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ CH^2.CO^2H \end{array}.$$

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Les résultats les plus importants contenus dans ce Mémoire sont les suivants :

1° La saponification de l'éther cyanosuccinique par la potasse en solution dans l'alcool à 95° bouillant m'a donné du succinate de potasse parmi les produits de décomposition.

2° J'ai préparé les éthers nouveaux : méthyl-éthyl-allyl-propyl-benzyl-cyanosuccinates d'éthyle.

3° La saponification par l'acide chlorhydrique gazeux m'a permis de donner une nouvelle préparation des éthers éthyléthényltricarbonique, propyléthényltricarbonique, benzyléthényltricarbonique.

4° J'ai préparé le cyanosuccinate et le cyanotricarballylate de méthyle.

5° Pour montrer que le cyanosuccinate de méthyle a même constitution et jouit des mêmes propriétés que son homologue éthylé, j'ai préparé le méthylcyanosuccinate de méthyle, et aussi le méthyléthényltricarbonate d'éthyle.

6° On a vu, à propos des actions exercées par les monochloracétates d'éthyle ou de méthyle sur les cyanacétates d'éthyle ou de méthyle, que les composés obtenus appartenaient à la série méthylée ou éthylée, suivant qu'on opérait au sein de l'alcool méthylique ou de l'alcool éthylique.

7° L'éther α-monobromopropionique, en réagissant sur l'éther cyanacétique sodé, m'a donné deux composés nouveaux ; le propenylcyanodicarbonate d'éthyle et le diméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique.

La saponification par l'acide chlorhydrique gazeux de l'éther propenylcyanodicarbonique constitue un nouveau mode de préparation de l'éther propenyltricarbonique, déjà obtenu par M. Bischoff.

8° L'action de l'éther α-monobromopropionique sur l'éther cyanosuccinique sodé a déterminé la production de l'éther méthylcyanotricarballylique, nouveau composé que j'ai encore obtenu en traitant l'éther propenylcyanodicarbonique sodé par l'éther monochloracétique.

9° L'éther monobromosuccinique, réagissant sur le cyanacétate d'éthyle sodé, m'a permis de préparer l'éther α-cyanotricarballylique qui n'avait pas encore été obtenu.

10° Grâce à l'obligeance de mon collègue M. Goguel, auquel je suis heureux d'adresser mes remerciements, j'ai pu donner la mesure des cristaux de cyanotricarballylate d'éthyle et de méthyle.

Enfin, c'est pour moi un devoir bien agréable à remplir que de témoigner ici à nouveau toute ma reconnaissance à mon savant et affectionné Maître, M. Haller, pour les conseils bienveillants qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je serai trop heureux si je réussis à apporter mon léger tribut de satisfaction au Professeur qui sait faire naître autour de lui tant d'activité scientifique.

ESSAI

SUR

L'HYBRIDATION DE LA VIGNE

PAR M. A. MILLARDET.

I

Considérations générales.

On sait ce qu'est un hybride : c'est le produit du croisement de deux espèces différentes. Le mulet, issu de la jument et du baudet, en est l'exemple le plus universellement connu peut-être, et, pour cette raison, on désigne fréquemment les hybrides sous le nom de mulets.

Par le terme de métis on désigne le produit du croisement non plus de deux espèces distinctes, mais de deux races de la même espèce. Ainsi deux variétés de chiens, deux races de poules appariées ensemble produisent non des hybrides, mais des métis.

A ces deux phénomènes différents correspondent des termes différents, ceux d'hybridation et de métissage.

D'une manière générale, l'hybridation est un phénomène rare dans les deux règnes à l'état de nature, tandis que le métissage, à l'état de domestication ou de culture, est fréquent.

Une propriété extrêmement remarquable distingue en général, sauf de très rares exceptions, les hybrides des métis. Tandis que chez ces derniers la sexualité reste normale, chez les hybrides elle est presque toujours sérieusement atteinte : le mulet par

exemple est incapable de procréer, de même les hybrides de serin et de chardonneret, etc.

Les exemples précédents ont été tirés du règne animal, de préférence, parce qu'ils sont connus de tout le monde. Le règne végétal n'en fournirait pas moins. Les saules, ronces, rosiers, glaïeuls, etc., laissent reconnaître au botaniste une foule d'hybrides. La plupart de nos races de céréales et de légumes ne se maintiennent pures qu'à la condition d'être isolées : lorsqu'elles sont rapprochées, elles ne tardent pas à dégénérer par le métissage. Les melons sont un exemple classique pour ce dernier cas.

Ces données élémentaires étaient nécessaires pour s'entendre au préalable sur ce qu'on doit entendre par un hybride de vigne, et pour faire apprécier l'intérêt considérable qu'offrent ces hybrides au point de vue purement scientifique.

D'après cela, en effet, les vignes désignées communément sous le nom d'*Hybrides Bouschet*, étant le résultat du croisement de diverses races (*Teinturier*, *Aramon*, *Alicante*, etc.) d'une seule espèce (*V. vinifera*), constituent des métis et non des hybrides.

Quant à l'intérêt scientifique qui s'attache aux hybrides de vignes, il provient de l'exception remarquable, unique même en tant qu'étant portée à ce degré, que font les hybrides en question à la loi d'altération de la sexualité énoncée plus haut. Non seulement le croisement a réussi jusqu'à présent entre toutes les espèces de vignes que j'ai tenté d'hybrider (quinze espèces du Nouveau-Monde et deux de l'Ancien), mais tous les hybrides, quelle que soit leur complexité, même les hybrides quaternaires (formés par le concours de quatre espèces), se laissent croiser à leur tour soit entre eux, soit avec leurs parents, soit même avec d'autres espèces et sont pleinement féconds. En un mot, ces hybrides se conduisent comme des métis (1).

(1) L'observation suivante peut servir à montrer combien l'hybridation est facile dans les vignes.

Sur un pied de *Chasselas*, cultivé dans une orangerie, je cueille en septembre quatre grappes (*A*, *B*, *C*, *D*) de grandeur et d'aspect moyens qui avaient été fécondées naturellement. Je compte, pour chaque grappe, le nombre de grains

Cette promiscuité sans pareille s'exerce aussi bien à l'état sauvage que sous l'influence de la culture. Il m'en a coûté quelque peine pour faire admettre ce fait par les botanistes (¹). M. Viala, au cours de sa mission en Amérique, en a reconnu la parfaite exactitude (²).

L'hybridation de la vigne mérite donc d'être étudiée au point de vue purement scientifique. Quant à son importance pratique, deux mots suffiront à la faire apprécier. En effet, non seulement l'hybridation artificielle nous a déjà dotés, en dix ans, de porte-greffes supérieurs à tous ceux qu'on connaissait jusqu'ici, mais

---

qui ont atteint une grosseur normale; j'en extrais les pépins et jette ces derniers dans un verre d'eau. Les pépins capables de germination tombent seuls au fond de l'eau; j'en fais le compte.

Sur ce même pied de *Chasselas* se trouvaient trois grappes (*E, F, G*) qui, en mai, avaient été castrées et fécondées par le pollen d'un même pied de *V. riparia*. Je compte de la même façon leurs baies de grosseur normale et les pépins bien constitués de ces dernières.

Voici les résultats de ces dénombrements :

A	pour	39 baies,	fournit 64	pépins normaux,	soit.....	164 0/0
B	—	17	—	29	—	—	170 0/0
C	—	26	—	30	—	—	150 0/0
D	—	33	—	52	—	—	154 0/0

Soit pour les quatre grappes non hybridées une moyenne de 160 pépins pour 100 baies.

E	pour	39 baies,	fournit 45	pépins normaux,	soit.....	115 0/0
F	—	21	—	33	—	—	157 0/0
G	—	29	—	50	—	—	172 0/0

Soit pour les trois grappes hybridées une moyenne de 148 pépins pour 100 baies.

Les différences entre ces moyennes sont si faibles qu'elles peuvent être regardées comme nulles, et cela avec d'autant plus de raison qu'on trouve d'une grappe à l'autre, aussi bien dans le cas de fécondation naturelle que dans celui d'hybridation, des différences de fécondité beaucoup plus considérables (grappes *E* et *G* surtout, 115 0/0 et 172 0/0).

On peut donc dire qu'il n'y a pas de différence notable dans la puissance fécondante du pollen du *V. riparia* appliqué au *Chasselas* comparée à celle du pollen du *Chasselas* lui-même.

Ce fait curieux m'a amené dernièrement à rechercher si le pollen d'une espèce américaine ne serait pas favorisé en quelque manière dans la fécondation d'un cépage européen. Je donnerai quelque jour le résultat de ces essais, s'il en vaut la peine.

(¹) Millardet, *Histoire des principales variétés et espèces de vignes d'origine américaine*, p. 153 et suiv.

(²) P. Viala, *Une mission viticole en Amérique*, 1880, p. 170 et suiv.

quantité de bromure de sodium. Le liquide éthéré résultant des opérations a été distillé dans le vide relatif, sous une pression de 0m06. Il a commencé à distiller à partir de 125° environ et jusqu'à 230°, sans qu'on ait remarqué d'arrêt sensible dans la marche ascendante du thermomètre. Plusieurs rectifications successives ne m'ont pas donné de meilleurs résultats. Néanmoins, j'ai soumis à l'analyse les portions recueillies de 185°-195° et de 210°-215°. Les résultats obtenus s'éloignaient sensiblement des chiffres théoriques. J'ai dû abandonner momentanément la préparation de ce corps. On aurait pu, il est vrai, saponifier le produit brut de la réaction, qui donnerait probablement, outre le mélange des composants en excès, les acides

$$\begin{array}{l} CH^2.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ C{<}^{CO^2H}_{CO^2H} \\ | \\ CH^2.CO^2H \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} CH^2.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ CH.CO^2H \\ | \\ CH^2.CO^2H \end{array}.$$

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Les résultats les plus importants contenus dans ce Mémoire sont les suivants :

1° La saponification de l'éther cyanosuccinique par la potasse en solution dans l'alcool à 95° bouillant m'a donné du succinate de potasse parmi les produits de décomposition.

2° J'ai préparé les éthers nouveaux : méthyl-éthyl-allyl-propyl-benzyl-cyanosuccinates d'éthyle.

3° La saponification par l'acide chlorhydrique gazeux m'a permis de donner une nouvelle préparation des éthers éthyléthényltricarbonique, propyléthényltricarbonique, benzyléthényltricarbonique.

4° J'ai préparé le cyanosuccinate et le cyanotricarballylate de méthyle.

5° Pour montrer que le cyanosuccinate de méthyle a même constitution et jouit des mêmes propriétés que son homologue éthylé, j'ai préparé le méthylcyanosuccinate de méthyle, et aussi le méthyléthényltricarbonate d'éthyle.

6° On a vu, à propos des actions exercées par les monochloracétates d'éthyle ou de méthyle sur les cyanacétates d'éthyle ou de méthyle, que les composés obtenus appartenaient à la série méthylée ou éthylée, suivant qu'on opérait au sein de l'alcool méthylique ou de l'alcool éthylique.

7° L'éther α-monobromopropionique, en réagissant sur l'éther cyanacétique sodé, m'a donné deux composés nouveaux ; le propenylcyanodicarbonate d'éthyle et le diméthylcyanotricarballylate d'éthyle symétrique.

D'après cela, on peut considérer les fleurs mâles comme dérivant de fleurs hermaphrodites, dans lesquelles le pistil, ainsi qu'on l'a vu précédemment, aurait été frappé d'une atrophie plus ou moins complète. On trouve fréquemment, en effet, parmi les plantes mâles (surtout chez le *V. rupestris*), tous les degrés dans le développement du pistil depuis sa disparition à peu près complète jusqu'à son développement presque normal. Aussi ne faut-il pas s'étonner si, en certaines années, dans certaines conditions qui sont favorables au développement du pistil, celui-ci arrive à tout son accroissement dans des fleurs habituellement mâles, et si celles-ci deviennent fertiles. J'ai vu, par exemple, une fois en dix ans, le *Cordifolia rupestris de Grasset*, plante habituellement stérile, porter une petite récolte. Le greffage produit quelquefois le même effet sur les plantes mâles : il provoque le développement du pistil, et ces plantes deviennent fertiles. J'ai constaté ce fait deux fois; dans un de ces cas, sur la plante que je viens de nommer; mais je ne saurais dire si cette fertilité produite par le greffage est persistante.

Il y a encore entre les fleurs hermaphrodites et les fleurs mâles une différence extrêmement curieuse et importante, ainsi qu'on va le voir : les étamines des unes et des autres ne sont pas semblables.

On sait que l'étamine est constituée par deux parties distinctes : l'anthère, petit corps renflé, bilobé, qui contient la poussière fécondante (pollen) et qui est au sommet de l'étamine; et le filet, mince filament translucide, de cinq à huit millimètres de long, qui supporte l'anthère (fig. 2, *a*). Or, dans les fleurs mâles, les filets sont à peu près deux fois aussi longs que dans les fleurs hermaphrodites, et de plus, tandis que dans les fleurs mâles, pendant la floraison, les filets restent droits, dans les fleurs hermaphrodites ils se recourbent en dehors et même au-dessous de la fleur, de manière à éloigner autant que possible les anthères du stigmate (fig. 1, *c*, *d*).

Ceci à l'état sauvage.

Nos plantes cultivées ont toutes, comme on l'a vu plus haut, des fleurs hermaphrodites (fig. 1, *a* et *b*; fig. 2, *a*); et ceci se comprend facilement, l'homme n'ayant pas manqué de sélectionner les plantes fertiles seules, à l'exclusion des autres. Mais si les fleurs des variétés cultivées sont toutes pourvues d'étamines, ces dernières ne sont pas toujours semblables. Chez la plupart de nos cépages, chose curieuse, les étamines ont des filets longs et

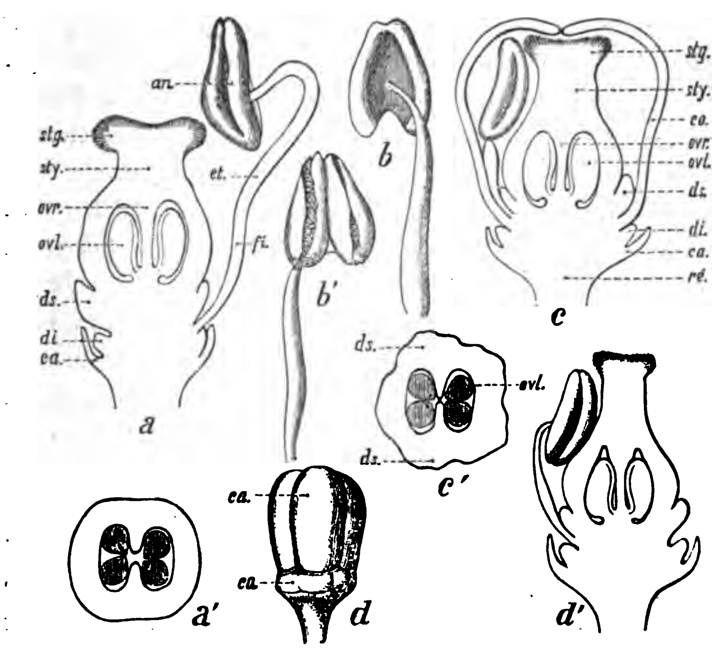


Fig. 2.

a, coupe longitudinale d'une fleur de *Malbec* au moment de la chute de la corolle. Une seule étamine a été figurée. — *a'*, coupe transversale de l'ovaire de cette fleur un peu au-dessus du point d'insertion des ovules. — *b*, étamine d'*Isabelle* vue par le dos. — *b'*, la même; le filet est vu de côté, l'anthère par la face ventrale. Les loges de cette dernière viennent de s'ouvrir et laissent échapper le pollen. — *c*, coupe longitudinale d'une fleur hermaphrodite de *V. cordifolia* dont la corolle est en place. — *c'* coupe transversale de l'ovaire de la même fleur un peu au-dessus de l'insertion des ovules. — *d*, fleur de *V. æstivalis* encore fermée. — *d'* coupe longitudinale d'une fleur hermaphrodite de *V. æstivalis* un peu avant son épanouissement; la corolle a été enlevée. — et. = étamine. — an. = anthère. — fi = filet. — ovr. = ovaire. — ovl. = ovule. — sty. = style. — stg. = stigmate. — d. s. = disque supérieur ou nectaires. — d. i. = disque inférieur. — ca. = calice. — co. = corolle. — ré. = réceptacle de la fleur.

droits comme dans les fleurs mâles des plantes sauvages (fig. 1, *a*, et fig. 2, *a* et *b*), tandis que chez un plus petit nombre les

étamines sont courtes et recourbées sous la fleur, pendant la floraison, comme cela a lieu dans les fleurs hermaphrodites à l'état sauvage. Le *Chasselas*, le *Malbec*, l'*Aramon*, par exemple, ont des étamines longues et droites; tandis que le *Muscat d'Alexandrie*, le *Damas blanc*, le *Bakator*, la *Panse jaune*, l'*Albanillo bianco*, le *Schiraz*, etc., possèdent des étamines courtes et recourbées.

Ce dernier fait, mentionné déjà par quelques auteurs, mais presque oublié, a été remis dernièrement en lumière par M. Rathay (1), professeur à l'école de viticulture de Klosterneuburg, qui l'a examiné plus attentivement que ses devanciers et en a tiré des conséquences d'un grand intérêt pratique.

Cet auteur, en effet, ayant examiné comparativement le pollen contenu dans les anthères des étamines à filets longs et droits et celui des anthères à filets courts et courbes, a constaté qu'il y a entre les deux sortes de pollen, en outre de différences remarquables de forme et de constitution, des différences essentielles au point de vue du fonctionnement. Tandis que le premier pollen émet très facilement des tubes dans l'eau pure ou sucrée, celui des étamines courtes n'y subit aucun changement. Il en tire cette conclusion que ce dernier pollen ne germe pas sur le stigmate et n'est pas apte à opérer la fécondation. La fertilité généralement beaucoup moindre, la coulure plus fréquente des cépages à étamines courtes et courbes, corroborent singulièrement ces conclusions.

J'ai répété ces observations sur le pollen de plusieurs fleurs à étamines courtes soit sauvages, soit cultivées (*Rupestris-Cinerea*, *Rupestris-Æstivalis*, *Scuppernong*, *Albanillo bianco*), et deux de mes hybrides fertiles franco-américains, et les ai trouvées exactes (2). Mais si l'observation semble vraie, au moins jusqu'à plus ample information, les conclusions qu'en tire l'auteur ont

(1) Emerich Rathay, *Die Geschlechtsverhaeltnisse der Reben*. — Wien, Wilhelm Frick, 1888.

(2) Le pollen de *Scuppernong* seul, placé dans l'eau sucrée, a présenté un commencement de germination bientôt arrêtée.

besoin d'être restreintes. De ce que le pollen des étamines courtes ne germe pas dans l'eau sucrée, il ne résulte pas nécessairement qu'il ne germe pas sur le stigmate. De fait, je possède environ trois cents hybrides obtenus par le pollen de ces fleurs à étamines courtes nommées plus haut (*Rupestris-Cinerea, Rupestris-Æstivalis, Scuppernong*) qui ne germe pas dans l'eau sucrée, et qui sont la preuve certaine que ce pollen est capable de germer sur le stigmate et d'opérer la fécondation. — On voit qu'un supplément d'information est nécessaire pour élucider complètement le point intéressant dont il s'agit.

On comprend maintenant comment se produit la fécondation de la vigne soit à l'état sauvage, soit dans nos vignobles. A l'état sauvage, les plantes à fleurs mâles se trouvent mélangées aux plantes à fleurs hermaphrodites, et le plus souvent, paraît-il, elles sont en plus grand nombre que ces dernières. C'est par elles que la floraison commence et par elles qu'elle se termine, de façon que leur pollen ne manque jamais à la fécondation des plantes fertiles. Mais comment parvient-il à ces dernières?

Les insectes, qui sont les agents les plus habituels du transport du pollen d'une plante à une autre, n'interviennent pas ici ou seulement d'une façon exceptionnelle. Les fleurs de vigne sont petites, sans apparence, sans nectar, et ne sauraient les attirer : aussi ne sont-elles visitées que très rarement par eux. Il faut dire cependant qu'elles ont un parfum très pénétrant dont la fonction nous échappe encore.

C'est le vent qui transporte le pollen des plantes mâles aux fleurs hermaphrodites. Sous son influence les pampres s'agitent, les feuilles battent doucement les grappes et, à chaque secousse, le pollen, devenu libre par l'ouverture des anthères, s'égrène dans l'ondée aérienne qui le dépose au passage sur les stigmates des fleurs hermaphrodites. Il y a sans doute une énorme proportion de pollen perdue, mais la fécondité des plantes mâles est tellement prodigieuse qu'il en reste encore suffisamment pour assurer la fécondation.

encore elle nous a fourni des producteurs qui, à une résistance complète au phylloxera et au mildiou, joignent une abondance et une qualité de fruits à peu près satisfaisantes. Or il est extrêmement remarquable qu'un résultat aussi complexe ait pu être atteint en si peu d'années. Il semble par conséquent qu'il n'y ait aucune variation désirable qu'il soit impossible d'obtenir avec le temps, si l'on réfléchit combien est grande la variabilité de la vigne, combien extraordinaire sa faculté d'hybridation et la fertilité de ses hybrides. L'hybridation constitue, on le sait, la cause la plus puissante de variation. Si par la culture seule le *V. vinifera* a pu nous donner les innombrables variétés actuellement cultivées, quels merveilleux résultats ne devons-nous pas attendre, lorsqu'à la culture nous joindrons l'hybridation!

Pour aujourd'hui je me bornerai à traiter presque exclusivement de la technique de l'hybridation.

II

Constitution de la fleur de la vigne. — Floraison et fécondation.

Considérons, en premier lieu, la constitution de la fleur de la vigne et la façon dont se font naturellement la floraison et la fécondation chez cette plante.

Toutes nos vignes cultivées sont des plantes fertiles, et leurs fleurs, offrant à la fois les organes mâles (étamines) et femelles (pistils), sont appelées, pour cette raison, hermaphrodites (fig. 1 *a, b*).

A l'état sauvage, il n'en est point ainsi. Le *V. vinifera*, qui est la souche de toutes nos variétés cultivées, comme tous les autres *Vitis*, présente en effet deux sortes d'individus : les uns fertiles, ont des fleurs hermaphrodites (fig. 1 *c*.); les autres, stériles, ont des fleurs mâles, c'est-à-dire dans lesquelles on ne trouve que les organes mâles complètement développés; les organes femelles y

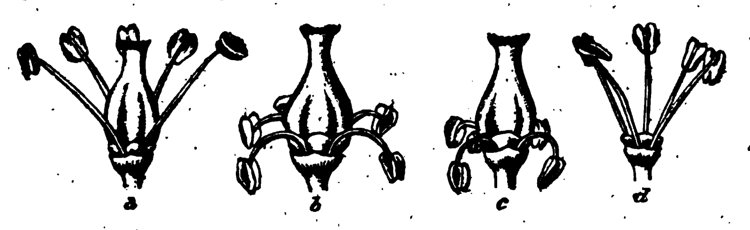


Fig. 1.

a, fleur hermaphrodite de *Chasselas* à étamines longues. — *b*, *id.* d'*Albanillo bianco* à étamines courtes. — *c*, *id.* de *Rupestris-Cinerea* à étamines courtes. — *d*, fleur mâle de *Rupestris-Ganzin*.

sont plus ou moins atrophiés (fig. 1, *d*). Le pistil n'y est représenté que par un globule plus ou moins gros et plus ou moins dissemblable quant à la forme et la structure à un pistil normal, et sur lequel se trouve rarement un rudiment de style.

la fécondation des fleurs castrées avait été opérée par du pollen provenant des autres fleurs qui s'épanouissaient en même temps sur la treille.

Ainsi, pour les fleurs à étamines longues, il y a ou il peut y avoir croisement dans la fécondation entre les individus. On peut ajouter qu'il est présumable, d'après les lois de la physiologie, que si ce croisement n'est pas nécessaire à une bonne fructification chez un grand nombre de cépages à étamines longues, il peut lui être occasionnellement très utile. Peut-être aussi remplit-il d'autres fonctions dans les phénomènes si complexes de la reproduction.

Quant aux cépages à étamines courtes, les observations citées plus haut de M. Rathay me semblent avoir démontré qu'ils ne fructifient convenablement que lorsqu'ils sont plantés à côté de cépages à étamines longues fleurissant en même temps, dont le pollen supplée à l'impuissance plus ou moins grande de leur pollen propre.

A l'état cultivé comme à l'état sauvage, c'est l'air qui est l'agent principal du transport du pollen. Je dis principal et non exclusif, car il m'arrive tous les ans, dans le Midi, d'observer sur les fleurs de la vigne deux petits coléoptères, le *Dasytes griseus* Küster et le *Scraptia fusca* Latr., en grande abondance, le *Dasytes* surtout (1). Ces deux bestioles sont extrêmement fréquentes au moment de la floraison. Très familières, elles volent d'une souche à l'autre et courent sur les fleurs pendant la castration, sur les pinces et les doigts de l'opérateur qu'elles gênent souvent. Ce sont des mangeuses de pollen : elles le dévorent sur les anthères et vont le chercher jusqu'à la surface des stigmates. Elles sont tellement couvertes de poussière pollinique qu'elles ne peuvent manquer d'en déposer fréquemment sur les stigmates. De fait, il m'est arrivé cinq ou six fois de voir des grappes castrées, mises à l'abri du pollen apporté par le vent, dans des cornets de papier,

(1) Je dois la détermination de ces deux insectes à l'obligeance de M. Pérez, mon collègue à la Faculté des sciences de Bordeaux.

être fécondées par ces insectes qui s'introduisaient par les fissures du cornet. En outre de ces deux amateurs de pollen, je n'ai guère rencontré sur les fleurs de la vigne qu'une petite *Céloine* brune, commune, et seulement très rarement.

Revenons maintenant à la floraison. Je prendrai pour type le *Chasselas*, que j'ai étudié d'une manière plus spéciale.

Les fleurs d'une grappe de *Chasselas* s'épanouissent successivement suivant l'ordre de leur développement. La floraison complète d'une grappe dure plus ou moins longtemps, suivant la grandeur de cette dernière et diverses autres circonstances, trois à cinq jours en moyenne, si le temps est favorable.

L'épanouissement des fleurs est subordonné essentiellement à la température. A 15° c., on voit déjà quelques fleurs s'ouvrir de temps en temps; mais ce n'est qu'à partir de 17° que la floraison se fait d'une manière normale. De 20 à 25°, elle marche très rapidement. La lumière solaire est sans action sur l'épanouissement, en tant que lumière : elle n'agit que par le calorique qui l'accompagne. En effet, les grappes placées dans l'obscurité complète épanouissent tout aussi complètement et rapidement leurs fleurs que celles qui sont placées à la lumière diffuse ou même aux rayons solaires directs, pourvu que les températures, dans les trois cas, soient les mêmes (1). Si, dans les grappes placées à

(1) Voici un exemple :

Chasselas cultivé dans une orangerie.

Le 15 mai au soir, je fais entrer dans une grande boite en carton mince un rameau de *Chasselas* portant une grappe qui a commencé à fleurir le matin même et dont j'ai supprimé, aux ciseaux, toutes les fleurs épanouies. Dans la boîte est suspendu un thermomètre. Celle-ci se ferme facilement et à peu près hermétiquement.

Le 16, à 7 heures du matin, le soleil donne sur la boîte, qui est fermée. La température de l'intérieur de celle-ci est de 22°c. Dix fleurs viennent de s'épanouir. — La boîte est refermée.

A 10 heures 15, cinquante fleurs sont épanouies. Il est remarquable que pour toutes ces fleurs l'épanouissement est complet : toutes les corolles sont tombées. Température dans la boîte, à ce moment, 32° c. — La boîte est refermée.

A 3 heures du soir, il n'y a pas d'autres fleurs épanouies. L'épanouissement a donc cessé à partir de 10 heures 15 au plus tard.

Le lendemain, l'épanouissement continue.

l'ombre ou sous les masses du feuillage, les fleurs s'épanouissent habituellement d'une façon incomplète, cela tient sans aucun doute à une nutrition insuffisante de ces fleurs amenée par un commencement d'étiolement.

La floraison du *Chasselas* commence de bonne heure, vers sept heures du matin, lorsque la chaleur de la nuit a été normale, si le temps est beau, et dès que la température atteint 15° c. Pendant une heure environ, c'est-à-dire aussi longtemps que la chaleur n'atteint pas 17° c., quelques fleurs seulement s'ouvrent; mais dès que la température devient plus élevée, l'épanouissement se fait plus rapide : vers neuf heures, on peut voir les fleurs s'ouvrir de minute en minute, souvent plusieurs à la fois sur la même grappe. Puis le nombre des fleurs qui s'ouvrent diminue rapidement, et de dix à onze heures du matin l'épanouissement est presque terminé. C'est tout au plus si, dans l'après-midi, une ou deux fleurs s'ouvrent encore sur des grappes où, dans la matinée, quarante à cinquante fleurs se sont épanouies.

Ainsi lorsque le temps est beau et chaud. Mais si la nuit précédente a été froide, si la matinée est fraîche, le ciel couvert, le temps humide ou pluvieux, l'épanouissement est retardé jusqu'à l'amélioration des conditions extérieures, c'est-à-dire jusqu'à ce que la température atteigne 15 à 17°. Dans ces conditions, il peut ne commencer que très tard dans la matinée ou même être reporté à l'après-midi. Il peut aussi se faire très lentement et irrégulièrement durant toute la journée et même, si la température reste insuffisante, être retardé jusqu'au lendemain. Si ces conditions défavorables se prolongent deux ou trois jours de suite, l'épanouissement complet n'a plus lieu : la corolle ne tombe plus, elle est seulement détachée à sa base et soulevée à un ou deux millimètres de hauteur. Alors elle reste définitivement sur la fleur comme un capuchon qui enferme les anthères et le stigmate (sensiblement comme en *a*, fig. 3).

Ce mode d'épanouissement entraîne généralement une coulure considérable chez tous les cépages, surtout chez le *Malbec*, le plus coulard de tous dans le Sud-Ouest. On pourrait désigner les

fleurs qui le présentent sous le nom de *fleurs encapuchonnées*, pour les distinguer de celles où la corolle tombe, c'est-à-dire où l'épanouissement est normal.

En observant avec attention une fleur qui s'épanouit, on voit d'abord la corolle se séparer du réceptacle de la fleur par une fissure circulaire étroite (fig. 3, *a*). Cette déchirure est déterminée par l'allongement rapide des étamines qui soulèvent la corolle. L'accroissement des étamines continuant peu à peu, la corolle remonte de plus en plus le long de leurs filets. Puis les pétales s'écartent les uns des autres de la base au sommet, tout en restant cohérents par ce dernier, ce qui lui donne la forme d'une étoile à cinq rayons (fig. 3, *b*); enfin elle oscille et tombe (fig. 3, *c*). L'ensemble de ces phénomènes dure le plus souvent de cinq à dix minutes.

Au moment de la chute de la corolle, les anthères se trouvaient un peu au-dessus et à côté du stigmate. Dès que la corolle est tombée, elles s'écartent latéralement du centre de la fleur, fuyant pour ainsi dire le stigmate, d'un mouvement assez rapide qui devient plus lent peu à peu (fig. 3, *d*). Il dure de cinq à dix minutes, après lesquelles on constate que les anthères sont éloignées de trois à quatre millimètres du stigmate et que les filets font avec le pistil un angle de 40 à 50° (fig. 3, *e*). Bientôt les anthères



Fig. 3.

Épanouissement de la fleur du *Chasselas* suivant l'ordre des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

oscillent sur leur point d'attache de manière à tourner en dehors la face qui était primitivement accolée au stigmate et sur laquelle se produisent les fentes qui donnent issue au pollen (fig. 3, *e*, et fig. 1, *a*). Ces mouvements des anthères, comme ceux des filets des étamines, ont pour effet de prévenir la fécondation du pistil par le pollen de la même fleur et de favoriser la fécondation par du pollen étranger.

Au moment où la corolle tombe, les anthères sont encore fermées et on n'aperçoit pas de traces de pollen sur le stigmate. C'est seulement pendant le mouvement des étamines en dehors, deux, trois, cinq minutes, ou plus, après la chute de la corolle, que les anthères s'ouvrent. Le pollen paraît au bord des fentes, se détache à la moindre secousse ou même tombe par son propre poids (fig. 1, *a*; fig. 2, *b'*; fig. 3, *e*).

Ainsi le pollen n'est pas déposé sur le stigmate, sous la corolle, avant la chute de celle-ci, comme le disent quelques auteurs, au moins dans les cas de floraison normale. Ceci n'a lieu que dans les fleurs que j'ai appelées *encapuchonnées* (¹).

(¹) Il semblerait, à première vue, que dans les fleurs encapuchonnées où les anthères et les stigmates sont protégés d'une manière durable par la corolle, la fécondation devrait être plus assurée que dans les fleurs à épanouissement complet. C'est le contraire qui est la vérité, et l'encapuchonnement des fleurs est une des causes les plus fréquentes de coulure. Je l'ai dit plus haut déjà à propos du *Malbec*. Voici, pour le *Chasselas*, quelques exemples précis :

A. — Le 15 juin, la floraison d'une grappe *A* de ce dernier cépage, cultivé en serre, vient de se terminer. Je compte et marque les fleurs qui sont complètement épanouies et celles qui sont encapuchonnées. J'enferme la grappe dans un sac de crin. Le 1er août, les fruits sont mûrs; je les récolte et les compte.

Voici les nombres :

Fleurs complètement épanouies sur la grappe *A*...	88
Nombre de baies normales fournies par ces fleurs..	55
Coulure, 38 0/0.	
Fleurs encapuchonnées sur la grappe *A*...........	24
Nombre de baies normales fournies par ces fleurs..	4
Coulure, 84 0/0.	

B et *C*. — Le 15 juin (même plante qu'en *A*), sur une grappe *B* qui termine sa floraison, je retranche toutes les fleurs à épanouissement complet et conserve seulement les fleurs encapuchonnées. Celles-ci sont au nombre de 132. Je mets un sac de crin.

Le même jour (toujours sur la même plante), sur une grappe *C* qui termine sa floraison, je supprime toutes les fleurs encapuchonnées et ne garde que celles à épanouissement complet, au nombre de 116. — Mis la grappe dans un sac de crin.

Le 1er août, les fruits sont mûrs; je les cueille et les compte.

Fleurs encapuchonnées de la grappe *B*...........	132
Nombre de baies normales fourni par ces fleurs ..	40
Coulure, 70 0/0.	
Fleurs à épanouissement normal de la grappe *C*..	116
Nombre de baies normales fourni par ces fleurs ..	49
Coulure, 58 0/0.	

Il semblait naturel d'attribuer cette coulure au manque d'action du pollen sur les ovules de la même fleur : du moins les travaux de Darwin donnaient à cette

Au moment où la corolle tombe, le stigmate possède son développement définitif : il est frais, non humide et retient facilement le pollen. Peu après, on peut le voir devenir humide; puis généralement apparaît à son extrémité une petite perle de liquide qui persiste souvent plusieurs jours, diminuant ou même disparaissant aux heures les plus chaudes de la journée pour reparaître le soir et le matin. Lorsque, pendant plusieurs jours, le temps est sec et chaud, cette sécrétion ne se produit pas, au moins dans la journée. En général, mais non toujours, l'apport du pollen sur le stigmate détermine la disparition complète de cette perle liquide après douze à vingt-quatre heures. L'humidité du stigmate est évidemment favorable au développement du pollen apporté sur cet organe. Cependant elle ne paraît pas indispensable, car il m'est arrivé bien souvent, dans le Midi, par des temps très secs, de déposer du pollen sur des stigmates sans trace apparente d'humidité et d'obtenir d'excellents résultats de ces hybridations. Je dois dire toutefois que, dans ces cas, l'absence

---

explication une certaine vraisemblance. Mais une recherche plus attentive m'a démontré l'inexactitude de cette interprétation.

En effet, ayant compté comparativement d'une part le nombre de baies provenant des fleurs complètement épanouies et celui des pépins fournis par ces baies, et d'autre part le nombre de baies provenant des fleurs encapuchonnées, ainsi que le nombre des pépins contenus dans celles-ci, l'avantage dans la fécondité des baies a été pour les fleurs encapuchonnées. — Voici les chiffres :

Total des baies provenant des fleurs complètement épanouies (grappes *A* — *pro parte* — et *C*)	104
Total de leurs pépins	105
Total des baies provenant des fleurs encapuchonnées (grappes *A* — *pro parte* — et *B*)	44
Total de leurs pépins	60

C'est-à-dire que 100 baies provenant de fleurs complètement épanouies ont fourni .... 100 pépins.

Tandis que 100 baies provenant de fleurs encapuchonnées ont fourni .... 136 pépins.

Or, j'ai remarqué, en examinant les stigmates des fleurs encapuchonnées, après avoir enlevé la corolle et les anthères avec précaution, que tous ces stigmates portaient bien du pollen, surtout sur leurs bords, mais qu'ils étaient absolument secs et que le pollen ne semblait avoir germé nulle part.

D'après cela, c'est à la sécheresse du stigmate et au manque de germination du pollen dans la plupart des fleurs encapuchonnées qu'il faut attribuer leur coulure habituelle.

de l'humidité dans la journée ne prouve pas que l'humidité manquât également pendant la nuit.

Les détails qu'on vient de lire sur la floraison du *Chasselas* me semblent devoir s'appliquer, en ce qu'ils ont d'essentiel, à toutes les vignes cultivées qui ont des étamines longues. Ils s'appliquent également, *mutatis mutandis*, aux fleurs mâles des plantes sauvages. Quant aux vignes cultivées à étamines courtes, j'ai omis de suivre l'épanouissement de leurs fleurs; mais il semble probable que ce dernier offre de l'analogie avec celui des fleurs hermaphrodites des vignes sauvages. Chez ces dernières, on constate, comme caractère spécial, une très grande rapidité et une grande amplitude dans les mouvements que font les étamines pour s'éloigner du pistil. Tandis que dans les fleurs à étamines longues, les filets des étamines n'arrivent à former avec le pistil qu'un angle de 45° à 60° seulement; dans ces dernières, ils se recourbent jusque sous l'ovaire (fig. 1, *b* et *c*), et au lieu d'employer pour ce mouvement, comme chez les premières, plusieurs minutes, ils l'exécutent en quelques secondes seulement. On dirait quelquefois, tellement ces mouvements sont rapides, que les filets sont de véritables ressorts.

III

Technique de l'hybridation artificielle.

—

Nous voici arrivés à l'hybridation artificielle.

Une première et très grande difficulté résulte de la différence des époques de floraison des diverses espèces de vignes américaines et de nos variétés européennes. Ainsi, le *V. riparia* fleurit quinze jours au moins avant nos cépages et le *V. rupestris* huit jours. Les *V. æstivalis* et *cordifolia* commencent à peine leur floraison quand la vigne européenne vient de terminer la sienne. Ce n'est que huit à dix jours après que cette dernière a passé fleur que le *V. Berlandieri* d'abord et le *V. cinerea* ensuite commencent à fleurir. Les *V. rubra* et *rotundifolia* terminent la série, et il y a entre leur floraison et celle de nos cépages un intervalle de trois à quatre semaines.

Heureusement que chez quelques espèces, le *V. rupestris* surtout, la floraison des plantes mâles vigoureuses dure très longtemps. Lorsque les grosses grappes sont défleuries, on voit apparaître une foule de grappillons qui, pendant une quinzaine de jours, fournissent encore du pollen en quantité suffisante. Il m'est arrivé fréquemment aussi, pour les hybridations les plus tardives, d'utiliser les fleurs que m'offraient les boutures mises de bonne heure en pépinière.

Mais ces ressources sont habituellement insuffisantes, et, pour faire coïncider les époques de floraison, on est obligé de la retarder chez les plantes précoces, de l'avancer chez les tardives.

Il y a divers moyens de retarder la floraison. Le meilleur, je crois, consiste à conserver sur la souche que l'on veut retarder un long sarment que l'on couche dans un fossé rempli ensuite de

terre, ne laissant sortir que le dernier œil. Au moment favorable, on le retire de terre, on pince la pousse terminale, et les rameaux qui se développent successivement fournissent pendant longtemps des fleurs à divers degrés de développement.

On peut aussi laisser les longs bois comme ceux dont je viens de parler à l'air libre. Quinze jours avant la floraison, on pince toutes les pousses à 6 ou 8 centimètres au-dessus de leur base. Il s'en produit d'autres qui, quinze jours ou trois semaines après la floraison normale, présentent des fleurs en bon état.

Lorsqu'il s'agit de plantes mâles que l'on ne craint pas de fatiguer, dès que leurs pousses ont 15 à 20 centimètres de long, on les pince toutes à 6 ou 8 centimètres de leur base. Un mois à six semaines après, ces plantes sont chargées de fleurs.

Enfin on peut encore se servir de marcottes en pots que l'on aura préparées dès l'année précédente, en ayant soin de faire sur la marcotte, au niveau du fond du pot, une ligature au fil de fer, pour forcer les racines à se développer à l'intérieur du pot. A la fin de février, on détache les marcottes de la plante mère, on met les pots dans une cave ou une glacière d'où on les retire au moment opportun pour les mettre à l'air libre. Ce procédé donne de très bons résultats pour les plantes mâles, qui fournissent ainsi d'excellent pollen.

Pour avancer la floraison, on enferme la plante dans une caisse vitrée. On peut même prendre la précaution de mettre de temps en temps sur ses racines une couche de 0^{m}25 de fumier frais. Avec beaucoup de soins, on peut avancer la floraison de huit à douze jours par ce moyen.

Les marcottes en pots, mises à temps en serre chaude, donnent aussi de bons résultats. Mais je dois dire que, jusqu'à présent, ces deux derniers procédés ne m'ont réussi que pour les plantes mâles. Les fleurs fertiles ne supportent pas ces différentes manipulations et tombent invariablement après la floraison.

Les plantes qui doivent servir de père et de mère étant supposées prêtes pour l'opération, nous avons maintenant à nous

occuper des fleurs qui doivent être fécondées. On choisit, sur la plante destinée à servir de mère, une ou plusieurs grappes de grandeur moyenne, bien nourries, qui aient déjà une dizaine de fleurs épanouies. Avec des ciseaux très fins on détache toutes ces dernières fleurs aussi bien que les fleurs les plus en retard, les plus petites par conséquent, qui ne fleuriraient que quatre ou

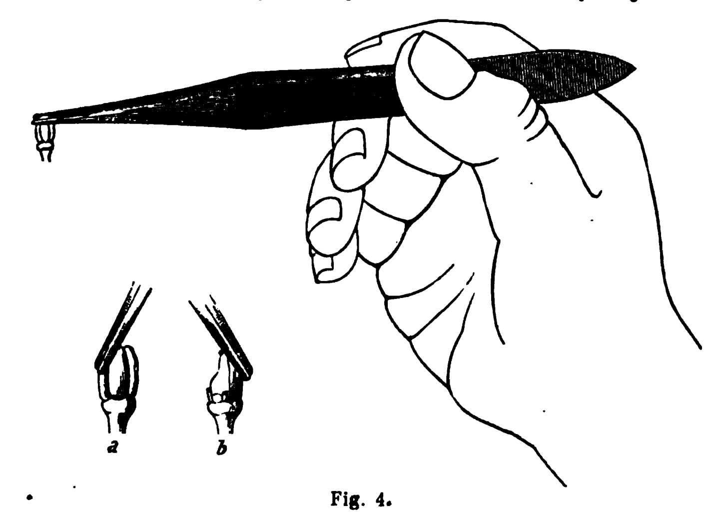


Fig. 4.

Castration d'une fleur de vigne. En *a* et *b*, la pince prend la corolle obliquement, successivement des deux côtés, afin de ne pas blesser le stigmate.

cinq jours plus tard. On peut aussi employer pour cette opération la pince fine qui sert à castrer : avec les mors on saisit le pédicelle des fleurs que l'on veut retrancher, on serre et on tire à soi.

Les pinces à castrer sont de fines pinces en acier de 8 à 10 centimètres de longueur, à mors longs et aigus, de 1 millimètre d'épaisseur au plus à l'extrémité ([1]). Avec les mors, l'opérateur saisit l'extrémité de la corolle soit transversalement (fig. 4), soit un peu obliquement (fig. 4, *a* et *b*). Il imprime à la pince un léger mouvement de torsion et tire à lui. Le plus souvent la corolle tout entière et quelques anthères se trouvent arrachées ainsi du premier coup. Quelques coups de pince supplémentaires

([1]) On les trouve chez les fabricants d'instruments de chirurgie, sous le nom de *pinces fines à dissection*.

sont ensuite nécessaires pour arracher les autres anthères. Une fleur castrée, on passe à une autre, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. On examine ensuite avec attention la grappe tout entière pour voir s'il n'y reste pas quelque anthère, ce qui arrive fréquemment.

La castration est en général une opération très simple. Il faut seulement un peu d'adresse et d'habitude pour ne pas écraser ou blesser le stigmate, qui souvent n'est guère qu'à un millimètre au-dessous du sommet de la corolle, quelquefois moins encore. Tout stigmate blessé devient incapable de fécondation.

La castration peut se faire à toute heure de la journée et par tous les temps.



Fig. 5.

Grappe castrée recouverte d'un sac de gaze, tendu par une spirale de laiton intérieure et retenu à une feuille par une épingle.

Dès qu'elle est terminée, on applique le pollen ou, si on ne doit le faire qu'après quelque temps, on enveloppe la grappe avec

précaution dans un sac de papier huilé (15 à 20 centimètres de haut sur 10 à 12 de diamètre) ou un sachet de gaze fine contenant un fil de laiton roulé en spirale qui sert à le tendre dans tous les sens. L'ouverture en est assujettie à la queue de la grappe par un fil ordinaire ou un fil mince de fer ou de laiton (fig. 5). Cette précaution est indispensable pour empêcher la fécondation par un pollen autre que celui qu'on veut employer. Je me sers aussi souvent, pour plus de commodité, de simples triangles en papier résistant (fig. 6, *a*), que j'enroule comme un cornet autour de la grappe et de la tige, assujettissant les extrémités du triangle avec

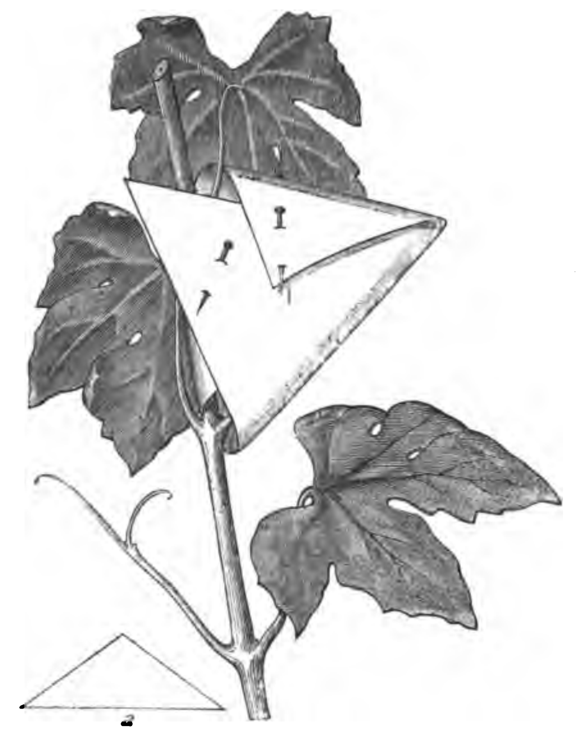


Fig. 6

Grappe castrée enfermée dans un cornet de papier. — *a*, forme du triangle de papier.

des épingles, ainsi que le montre la figure 6, de manière à ne laisser que des ouvertures aussi petites que possible. Ces cornets

suffisent contre le pollen que transporte le vent, mais ils permettent l'entrée du sac aux insectes dont il a été question précédemment. Néanmoins, je les regarde comme suffisants au point de vue pratique et n'emploie les sacs de papier ou de mousseline que lorsque toute cause d'erreur doit être écartée et quand l'apport du pollen doit être retardé plusieurs jours.

Reste à considérer l'application du pollen.

La grappe destinée à fournir ce dernier doit offrir plusieurs fleurs fraîchement épanouies. On cherche parmi ces dernières une fleur dont les anthères soient ouvertes. S'il n'y en a pas en cet état, on expose la grappe au soleil pendant quelques minutes. Sous l'influence de la dessiccation, les anthères s'ouvrent et le pollen se présente entre leurs valves, sous forme d'une fine poussière jaunâtre ou blanchâtre (fig. 2, *b'*). Avec la pince on saisit une de ces fleurs par la partie supérieure du pédicelle, on l'arrache et on touche légèrement et successivement, avec ses anthères, les stigmates dont on veut opérer la pollinisation. Une fleur mâle suffit à en polliniser une dizaine. On continue la même opération jusqu'à ce que tous les stigmates de la grappe qu'il s'agit d'hybrider aient reçu du pollen. On enferme alors et sans tarder la grappe pollinisée dans un sac de papier ou de mousseline ou dans un cornet de papier, ainsi qu'il a été dit plus haut, pour prévenir l'apport du pollen étranger. Huit à dix jours après, on enlève ces abris et on les remplace par des sacs de crin destinés à protéger les fruits contre les oiseaux et les insectes. L'opération est terminée.

Grâce à toutes ces précautions, on obtient à peu près un grain de raisin pour deux ou trois fleurs castrées et pollinisées, et il est excessivement rare que tous les pépins obtenus ne soient pas hybridés. Ce cas se présente à peine quatre à cinq fois sur mille et s'explique par quelque castration incomplète.

A ceux qui trouveraient ces opérations trop délicates, je proposerai le procédé suivi par Bouschet de Bernard et, plus récemment, par le docteur Davin.

Au moment où la grappe que l'on veut féconder artificiellement commence à fleurir, on y accroche une ou deux grappes en pleine floraison de l'espèce qui doit servir de père. Chaque matin on répète la même opération, après avoir enlevé la grappe de la veille, jusqu'à ce que la floraison soit terminée. Sur tous les pépins que fournira cette grappe, j'estime qu'il peut y en avoir de un tiers à la moitié qui sont réellement le produit de l'hybridation. Je sais que le docteur Davin a obtenu par ce procédé une plus forte proportion de graines hybridées, mais il ne faut pas oublier que dans ses essais la plante mère était un *V. Berlandieri* fertile, par conséquent à étamines courtes.

On peut appliquer le pollen sur les fleurs castrées ou immédiatement après la castration ou seulement quelques jours plus tard. D'une manière générale, aussi longtemps que les stigmates ne sont pas desséchés, de couleur brune, ils sont capables de fécondation. J'ai conservé des stigmates en bon état pendant huit à neuf jours.

Puisque les stigmates gardent leur vitalité pendant plusieurs jours, on peut se demander quel est, pendant ce laps de temps, le moment le plus opportun pour l'application du pollen. L'expérience m'a appris que c'est le quatrième ou le cinquième jour après la castration (1). Cela tient vraisemblablement à ce que, par

---

(1) C'est ce que prouve l'expérience suivante :

Le 9 juin, je castre six grappes d'*Aramon* et immédiatement après j'applique (à 2 heures du soir), sur une de ces grappes (A), le pollen du *Rupestris de Fortworth*. Toutes ces grappes sont aussitôt renfermées dans des sacs de gaze fine.

Le lendemain (10 juin), je passe en revue avec attention les fleurs de toutes les grappes castrées la veille et supprime toutes celles dont les ovaires ou les stigmates ont été lésés par les pinces pendant la castration, ce qui se distingue facilement à la couleur brune des parties blessées. Les grappes sont renfermées de nouveau dans leurs sacs.

Après cette opération, il reste :

Sur la grappe	A,	212 fleurs en bon état.	
—	B,	87	—
—	B',	155	—
—	C,	140	—
—	C',	98	—
—	D,	88	—

Le 11 juin, à 2 heures, application du pollen du même *Rupestris de Fortworth*,

cette dernière opération, on ouvre prématurément une foule de fleurs qui ne se seraient épanouies que quelques jours plus tard.

Dans ce qui précède, j'ai supposé que l'opérateur employait, pour la fécondation, du pollen frais pris sur des fleurs fraîches.

---

par le même procédé que pour la grappe A, sur les grappes B et B'. — Remis les grappes dans les sacs.

Le 14, à 2 heures, même opération avec le même pollen pour les grappes C et C'.

Le 16, à 2 heures, même opération avec le même pollen pour la grappe D. Je remarque que sur cette grappe un grand nombre de stigmates sont bruns (morts) et que la plupart ont perdu leur fraîcheur. Les stigmates humides constituent à peine un quart du nombre total des fleurs.

Pendant ces huit jours et même après, le temps a été exceptionnellement sec et chaud.

Le 20, les sacs de gaze sont remplacés par des sacs de crin.

Fin septembre, les grappes sont cueillies et examinées avec soin. Leurs baies fertiles, de grosseur normale, sont comptées; de même les millerandées, stériles. Les pépins en sont extraits et nettoyés, puis jetés dans un verre d'eau. Ceux qui vont au fond du verre (fertiles) et ceux qui surnagent (stériles) sont comptés à part.

Voici les chiffres :

Grappe A.

212 fleurs ont fourni 109 baies normales, fertiles, et 12 baies millerandées, stériles.

Ces 109 baies ont donné 127 pépins fertiles et 7 stériles;

C'est-à-dire que 100 fleurs ont produit 51 baies fertiles et que 100 baies fertiles ont produit 116 pépins fertiles,

Ce qui fait 59 pépins fertiles pour 100 fleurs fécondées.

Grappes B et B'.

242 fleurs ont fourni 113 baies normales, fertiles, et 12 baies millerandées, stériles.

Ces 113 baies ont donné 157 pépins fertiles et 27 stériles;

C'est-à-dire que 100 fleurs ont produit 46 baies fertiles et que 100 baies fertiles ont produit 138 pépins fertiles,

Ce qui fait 64 pépins fertiles pour 100 fleurs fécondées.

Grappes C et C'.

238 fleurs ont fourni 134 baies normales, fertiles, et 0 baie millerandée, stérile.

Ces 134 baies ont donné 263 pépins fertiles et 39 pépins stériles;

C'est-à-dire que 100 fleurs ont produit 56 baies fertiles et que 100 baies fertiles ont produit 196 pépins fertiles,

Ce qui fait 110 pépins fertiles pour 100 fleurs fécondées.

Grappe D.

88 fleurs ont fourni 21 baies normales, fertiles, et 1 baie millerandée, stérile.

Ces 21 baies ont donné 23 pépins fertiles et 2 pépins stériles;

C'est-à-dire que 100 fleurs ont produit 23 baies fertiles et que 100 baies fertiles ont produit 19 pépins fertiles,

Ce qui fait 26 pépins fertiles pour 100 fleurs fécondées.

C'est donc la fécondation du 14 juin, c'est-à-dire au cinquième jour après la castration, qui a produit le résultat le plus avantageux au point de vue du nombre des graines.

Il est important de savoir s'il est possible de maintenir les fleurs fraîches pendant plusieurs jours et d'utiliser le pollen sec.

Pour conserver en bon état les fleurs sur lesquelles doit être pris le pollen, il faut avoir soin d'abord de ne s'adresser qu'à des grappes sur lesquelles il n'y ait encore qu'un petit nombre de fleurs épanouies. Après les avoir cueillies par un temps sec, on en roule une à quatre ensemble, suivant leur grosseur, dans une ou deux feuilles de vigne bien sèches, sans les comprimer, et on met ce petit paquet dans un étui de papier, que l'on ferme en le froissant à chaque extrémité. Le tout est déposé dans un lieu frais et sec. Après trois jours, on examine les grappes. S'il y a des traces d'humidité sur les feuilles (buée plus ou moins forte), on ouvre le papier à chaque bout de l'étui pour faciliter l'accès de l'air et prévenir la moisissure et la fermentation. De cette façon, les fleurs se conservent de cinq à sept jours en bon état. Elles s'ouvrent successivement dans le paquet, de telle façon qu'au moment où on en a besoin on en trouve toujours qui sont fraîchement épanouies. Si alors les anthères n'étaient pas ouvertes, quelques minutes d'exposition au soleil suffiraient à déterminer la rupture de leurs loges et la mise en liberté du pollen.

Ce procédé réussit admirablement avec les fleurs mâles. Lorsqu'on ouvre le paquet, la plupart des corolles sont détachées; elles tombent au moindre choc et les anthères s'ouvrent. Dans ce cas, au lieu de prendre péniblement avec la pince et une à une les fleurs en question, pour toucher successivement, avec leurs anthères, les stigmates des fleurs à féconder, je me contente de promener la grappe mâle à la surface de la grappe castrée; le pollen s'échappe en véritables nuages, couvrant tous les organes, les stigmates comme les autres.

On peut aussi, à l'aide des grappes (mâles surtout) qui sont dans l'état dont je viens de parler, préparer une grande quantité de pollen pur. Pour cela, on fait tomber avec précaution toutes les corolles qui tiennent encore, puis on place la grappe sur une feuille de papier dans un lieu sec. On la secoue de temps en temps; le pollen sort des anthères et tombe sur le papier. Après

vingt-quatre heures de séjour à l'air libre dans un lieu sec, on le verse dans une boîte ou un petit tube de verre court, où il se conserve très bien. Ce pollen est d'un emploi très commode. On en prend de petites quantités sur un pinceau à aquarelle sec, et on touche légèrement avec ce dernier les stigmates que l'on veut polliniser. Il faut avoir autant de pinceaux que de sortes de pollen, ou avoir soin, pour ne pas mélanger ces derniers, lorsqu'on veut changer de pollen, de plonger le pinceau dans l'alcool et de le laisser sécher.

On a vu tout à l'heure qu'il est possible de conserver fraîches des fleurs pendant six à sept jours. Passé ce temps, elles sont généralement envahies par la pourriture, et le seul moyen de conserver plus longtemps le pollen est alors de laisser sécher le tout. Pour cela, vers le sixième jour on ouvre définitivement les étuis de papier doublés d'une feuille de vigne dans lesquels se trouvent les grappes fraîches, et on secoue ces dernières sur une feuille de papier. Les fleurs se détachent ainsi que la corolle, les étamines et les anthères, et tombent sur le papier où on les étale en couche mince. Il ne reste entre les mains de l'opérateur que la grappe, qui est jetée. La feuille de papier est mise dans un lieu sec, aéré, où tous les débris qui la couvrent se dessèchent complètement en trois ou quatre jours. On conserve cette poussière dans une boîte. Elle est d'un usage très commode pour l'hybridation. On peut en préparer facilement de très grandes quantités. Pour polliniser les grappes castrées, d'une main on tient sous ces dernières une feuille de papier, tandis que de l'autre on verse doucement la poussière de la boîte sur les différentes parties de la grappe qu'il s'agit de féconder. On verse de nouveau la poussière recueillie sur le papier dans la boîte et on recommence. Après deux ou trois opérations, on peut être certain que la fécondation est assurée et on met de côté la boîte pour d'autres hybridations.

Nous avons réussi, M. de Grasset et moi, plusieurs hybridations par ce procédé, avec des fleurs cueillies depuis quinze jours et desséchées depuis neuf à dix. Il est clair qu'avec la poussière de

débris de fleurs dont je parle, on pourrait hybrider au pinceau comme avec le pollen pur dont il a été parlé plus haut. En effet, lorsqu'on examine à la loupe les débris de toutes sortes, anthères, corolles, étamines qui la constituent, on voit qu'ils sont absolument couverts de pollen qui s'attache facilement et en quantité au pinceau.

Cette dernière méthode offre plusieurs avantages : une grande facilité de préparation du pollen, la rapidité de la pollinisation des stigmates, et la possibilité de conserver du pollen utilisable pendant deux semaines. Ce serait là, d'après Wichura, Nietner et divers auteurs, la longévité maximum du pollen dans les saules, les rosiers, etc. Je n'ai pas essayé de pollen plus vieux; mais M. P. Castel, ancien président de la Société d'Agriculture de l'Aude, m'affirmait, en septembre 1890, que depuis plusieurs années il fait couramment, sur une grande échelle, des hybridations de vignes au pinceau avec du pollen de l'année précédente. C'est là un fait extrêmement intéressant tant au point de vue botanique qu'à celui de la pratique.

Le pollen (des étamines longues) de la vigne germe facilement et presque immédiatement dans l'eau pure et l'eau additionnée de 1 à 10 0/0 de sucre. Dans l'eau pure ou sucrée à 4 0/0, en vingt-quatre heures, au mois de juin, par une température normale, les tubes polliniques du *Chasselas* atteignent une longueur de un demi-millimètre à un millimètre. Je me suis assuré que dans l'*Aramon* pollinisé par son propre pollen, par une température normale, quarante-huit heures après que le pollen a été déposé sur le stigmate, on trouve déjà des tubes polliniques dans l'intérieur de l'ovaire, au voisinage du micropyle; huit heures plus tard (c'est-à-dire après cinquante-six heures), on en voit qui ont pénétré dans l'endostome. Mais comme la papille mucellaire est épaisse et constituée par une douzaine de couches de cellules, il faut au boyau pollinique un assez long temps pour la traverser, et ce n'est que le cinquième jour après le dépôt du pollen sur les stigmates (dans le *Chasselas*) que j'ai été à même de constater la

fécondation de l'oosphère. Au huitième jour *(Chasselas)*, l'embryon est constitué par une petite boule d'une trentaine de cellules. A ce moment, l'endosperme est formé; l'ovaire et l'ovule commencent à grossir rapidement, et, du dixième au douzième jour, alors que les ovaires et les ovules non fécondés n'ont pas changé, on voit dans ceux qui sont fécondés les proportions doublées : les ovules ont alors deux millimètres de long.

On sait qu'en général, après la fécondation d'une fleur par le pollen soit d'une race, soit d'une espèce distincte, rien, ni dans les fruits ni dans les graines qui sont le résultat du croisement, ne peut servir à reconnaître ce dernier, les fruits et les graines restant conformes à ce qu'ils sont habituellement dans la plante mère. Il y a cependant quelques exceptions à cette règle et justement dans le genre vigne. Ainsi, Henry Bouschet et son père ont observé plusieurs fois, au cours de leurs croisements entre l'*Aramon*, l'*Alicante*, la *Carignane* et le *Teinturier* (ce dernier fonctionnant comme père), qu'un certain nombre de fruits, au lieu d'avoir le jus incolore comme il l'est naturellement dans ces cépages, l'avaient coloré en rouge comme dans le père *(Teinturier)*. Cette particularité était pour eux la preuve que le croisement avait réussi, et les graines provenant des fruits ainsi modifiés étaient semées à l'exclusion des autres ([1]). Il existe encore sur cette question d'autres données que l'on pourrait discuter ([2]). Mais comme les faits bien établis seuls doivent être pris en considération, je crois plus utile de passer outre et d'en rapporter deux bien certains, dont je dois la connaissance au baron Antonio Mendola, un des ampélographes européens actuels les plus éminents. Il m'écrivait, à la date du 7 février 1883 : « J'ai obtenu de belles variétés par la fécondation artificielle selon la méthode de M. Bouschet... Dans divers croisements, quoique rarement, j'ai observé un changement de coloration sur la grappe fécondée.

([1]) *Bulletin de la Société d'Agriculture de l'Hérault*, 1865, p. 39 et 40.
([2]) Même recueil, 1861, p. 339, et 1865, p. 123.

Ainsi, ayant fécondé le raisin blanc *Sanginella* de Naples par le pollen du *Sabalkanskoï* rouge de Crimée, plusieurs baies de la grappe fécondée montrèrent la couleur rouge du *Sabalkanskoï*. J'ai vu les mêmes phénomènes sur les *Muscats blancs* fécondés par les rouges; mais je n'ai jamais observé l'inverse, c'est-à-dire la décoloration de raisins noirs par l'action du pollen des variétés à fruits blancs. »

La modification de la couleur normale du fruit par le croisement est donc un fait bien établi. Mais il est à remarquer que, jusqu'à présent, il n'a été constaté que dans le métissage. Malgré les très nombreuses hybridations que nous avons faites M. de Grassel et moi, jamais un cas de ce genre ne s'est présenté à nous. Jamais non plus nous n'avons observé de variations dans la forme des graines qui sont le résultat direct de l'hybridation. Nous les avons toujours vues offrir uniquement les caractères de celles de la plante mère. Une graine d'*Aramon* conserve toujours les caractères d'une graine d'*Aramon* et n'en présente pas d'autres, qu'elle soit le produit de la fécondation normale de l'*Aramon* ou de son croisement avec les *V. riparia, rupestris* ou autres. La réciproque est également vraie.

Je disais, au commencement, que toutes mes tentatives d'hybridation ont réussi avec la plus grande facilité. Il y a cependant à cette règle une exception que je dois signaler parce qu'elle est unique et qu'elle présente de curieuses particularités.

En 1884, je pollinisai cinq grappes castrées de *V. rupestris* par l'*Aramon-Teinturier-Bouschet*, plante à étamines longues et qui n'offre rien d'anormal dans sa fructification. La coulure fut presque générale, et je ne récoltai que cinq pépins bien constitués en apparence, mais dont aucun ne germa.

L'opération inverse donna le même résulat. Une grappe tout entière d'*Aramon-Teinturier* (ces grappes sont très grandes) pollinisée par un *Rupestris* mâle ne produisit que quelques baies dont aucun pépin ne leva.

En 1885, je pollinisai une grappe entière de ce même cépage

par un *Rupestris-Cinerea* à étamines courtes. Une autre grappe fut aussi pollinisée par un *Rupestris-Æstivalis* à étamines également courtes. (Je savais par d'autres essais que le pollen de ces deux plantes jouit d'une activité sinon entière, du moins à peu près normale.) Sur chacune de ces grappes, il se développa de vingt à trente baies normales. Mais presque tous les pépins furent très petits et creux. Il n'y en eut que quatre de grosseur normale, dont trois étaient creux; l'unique qui fut bon en apparence ne germa pas.

L'opération inverse fut faite avec le même *Rupestris-Æstivalis,* c'est-à-dire que ce dernier fut pollinisé par l'*Aramon-Teinturier.* Il en résulta un nombre normal de baies et de graines (74), bonnes en apparence, mais dont neuf seulement germèrent.

Une grappe de ce même *Aramon* pollinisée par un *Riparia-Æstivalis* mâle dont le pollen est très actif, produisit un petit nombre de baies fertiles dans lesquelles se trouvèrent très peu de graines (12) normales en apparence, mais dont aucune ne germa.

Et cependant une dernière grappe du même cépage pollinisée par le *Rupestris-Ganzin* mâle, plante à pollen très actif, produisit une ample récolte de baies bien développées. Celles-ci fournirent soixante et un pépins sensiblement normaux, mais tombant assez lentement au fond de l'eau. Sur ce grand nombre de graines trois seulement ont germé.

Voilà donc un cépage qui ne se laisse hybrider que très difficilement et d'une manière tout à fait irrégulière et capricieuse.

IV

Principales combinaisons dans le croisement.

Il resterait à discuter un point très important : celui des combinaisons les plus favorables au but que l'on se propose par l'hybridation. Faute d'une expérience suffisante, je me bornerai pour aujourd'hui à quelques rapides indications.

Un hybride d'*Aramon* et de *Rupestris* peut être produit de deux façons : ou bien en fécondant le *Rupestris* par l'*Aramon* ou bien par l'opération inverse. Ce dernier cas présente lui-même deux variantes, l'*Aramon* pouvant être fécondé par des fleurs mâles (à étamines longues) ou bien par des fleurs hermaphrodites (à étamines courtes) de *Rupestris*.

Bien que la possibilité de ce dernier genre d'hybridation soit niée par M. Rathay *(op. cit.)*, elle existe cependant, ainsi que je l'ai fait remarquer plus haut. Mais je manque d'observations pour dire au juste si l'hybridation avec ce pollen est plus ou moins facile qu'avec le pollen des fleurs mâles; ce dernier cas toutefois me semble plus probable. Il m'est également impossible de déterminer d'une façon exacte les résultats de ce mode d'hybridation pour les plantes qui en sont le produit. Tout ce que je peux dire aujourd'hui, c'est que les deux cent cinquante à trois cents hybrides de ce genre que nous possédons actuellement, M. de Grasset et moi, sont en général notablement inférieurs comme vigueur et résistance aux mêmes hybrides faits avec du pollen de fleurs mâles. Ce dernier mode d'hybridation est celui qui nous a donné les meilleurs résultats au point de vue de la vigueur et de la résistance au phylloxera, et celui que nous avons pratiqué sur la plus grande échelle depuis 1880.

La comparaison des hybrides obtenus en fécondant une variété

européenne par le pollen mâle d'une espèce américaine ou inversement en fécondant la plante américaine hermaphrodite de la même espèce par le pollen (provenant d'étamines longues) de la même variété européenne, nous a amenés depuis quelque temps, M. de Grasset et moi, à la constatation d'un fait général très curieux et des plus importants : l'*influence prépondérante de la plante qui fonctionne comme père* dans ces croisements.

Nous possédons, en effet, des centaines de chaque sorte de ces hybrides, par exemple *Aramon* × *Rupestris* (1) et *Rupestris* × *Aramon*, *Alicante-Bouschet* × *Rupestris* et *Rupestris* × *Alicante-Bouschet*, etc.; d'une manière générale et sauf de rares exceptions, les hybrides dans lesquels le *Rupestris* est le père sont plus résistants au phylloxera, à grappes beaucoup moins grandes et à fruits beaucoup plus petits que cela n'a lieu dans les hybridations inverses. En hybridant l'européen par l'américain, on obtient une très haute résistance au phylloxera, mais la fructification est insuffisante. Par l'opération inverse, la fructification est bonne, mais la résistance a disparu en grande partie. Cette loi, qui semble ne souffrir que très peu d'exceptions, a, on le conçoit facilement, une importance considérable au point de vue pratique.

Il est vrai que Darwin ne l'admet pas comme loi générale, mais pour le genre vigne elle existe certainement, et il est bien probable que ce n'est pas là un fait isolé. On en connaît d'autres, sinon identiques, du moins analogues. Ainsi, dans un ouvrage récent (2), M. Nietner nous dit (p. 409) : « L'expérience a appris que dans les hybrides artificiels de rosiers, la fleur a plus d'analogie pour la forme avec celle de la plante mère, tandis que le feuillage et le port général se rapprochent davantage de ceux du père... L'influence du père se fait sentir surtout dans l'habitus général de l'hybride, mais elle est également prépondérante dans la couleur de sa fleur. » Aussi conseille-t-il de choisir pour mères les variétés à fleurs doubles et d'une belle forme et pour pères

(1) Le signe × signifie fécondé par.
(2) Th. Nietner, *Die Rose*. Berlin, 1880.

celles à belle végétation et dont la fleur est remarquable par un coloris brillant, lors même qu'elles seraient peu doubles.

Je n'ai pas fait de recherches bibliographiques sur ce sujet, mais je ne doute guère qu'on ne puisse trouver dans la littérature botanique d'assez nombreux exemples de cas où l'influence tantôt du père, tantôt de la mère, sur certains organes de l'hybride, se montre prépondérante.

Tous les hybrides faits jusqu'à présent par M. de Grasset et moi ne contiennent du sang européen et américain que dans deux proportions différentes : ou bien un demi de chaque ou trois quarts de l'un contre un quart de l'autre.

Parmi les premiers, les plus simples sont constitués par un cépage européen seulement et une seule espèce américaine *(Aramon × Rupestris)*. D'autres sont un peu plus complexes et formés d'un seul cépage européen et de deux espèces américaines *(Aramon × Cordifolia-Rupestris)*. Enfin il y en a qui sont constitués par deux cépages européens et deux espèces américaines *(Aramon-Rupestris × Carignane-Riparia)*. L'étude de cés diverses combinaisons ne nous a encore révélé aucune particularité importante.

Quant aux hybrides à trois quarts de sang, s'ils contiennent trois quarts de sang américain *(Chasselas-Riparia × Riparia)*, ils sont tellement semblables à l'américain et leur fructification par conséquent est tellement rudimentaire, qu'ils ne peuvent servir que de porte-greffes. Il est permis d'attendre des hybrides à trois quarts de sang européen (*Chasselas-Riparia × Chasselas* ou inversement) une fertilité notable, mais leur résistance au phylloxera et au mildiou sera-t-elle suffisante? Deux à trois années seront encore nécessaires pour répondre à cette question [1].

---

[1] J'ai déjà traité brièvement ce sujet dans une notice insérée au volume du *Congrès international d'agriculture*, tenu à Paris en 1889, p. 714 : *Notes sur les résultats de l'hybridation de la vigne.*

V

Éducation des Hybrides.

Cette notice serait incomplète si je n'indiquais les précautions à prendre pour la conservation et le semis des graines obtenues par l'hybridation aussi bien que les soins particuliers qui sont nécessaires aux hybrides pendant leur jeune âge.

On laisse les grappes fécondées artificiellement aussi longtemps que possible sur les souches, afin d'en parfaire la maturité. Après les avoir cueillies par le beau temps, on les suspend en un lieu sec, puis, en décembre ou janvier, lorsque la pourriture y apparaît, on sépare avec précaution les pépins des râpes, pulpes, etc. On les lave et on jette ceux qui surnagent et sont creux. Ceux qui tombent au fond de l'eau sont essuyés dans un linge fin, et quand ils ne présentent plus de traces d'humidité, mis dans une boîte en lieu sec.

Au premier printemps, un mois avant l'époque du semis, les pépins sont immergés pendant cinq à six jours dans l'eau pure en faible épaisseur (un centimètre à deux) pour que l'air s'y renouvelle facilement. Durant cet intervalle on change l'eau deux ou trois fois.

On les retire alors. On remplit de très petits pots à fleurs de terre de jardin ou de bruyère humide jusqu'à un centimètre du bord. On tasse la terre et on dépose dessus les pépins sortant de l'eau. On recouvre d'un centimètre de sable fin humide. Les pots sont placés dans des assiettes où on maintient un peu d'eau et recouverts d'une lame de verre. Ils sont conservés à une température basse ou modérée.

Cette stratification dure trois semaines ou un mois. Elle a pour

effet de rendre les germinations plus nombreuses et la levée plus rapide et plus régulière.

On peut semer en plein air ou sur couche chaude. Dans ce dernier cas, sous l'influence d'une température comprise entre vingt et trente-cinq degrés centigrades, suivant les heures de la nuit et de la journée, vers le quinzième jour paraissent les premières plantes, et au trentième la germination est terminée. Lorsqu'on obtient, en moyenne, quatre-vingts germinations pour cent pépins semés, on a lieu d'être satisfait.

En plein air, la germination dure deux ou trois fois plus longtemps. Un bon tiers des graines ne germe pas ou trop tard ou seulement l'année suivante.

Nous avons l'habitude, M. de Grasset et moi, de semer les graines les plus précieuses sur couche chaude et sous châssis, en pots de sept à huit centimètres de diamètre, dans de la terre de bruyère qui a été purgée préalablement de toute espèce d'insectes par le sulfure de carbone. Dans les premiers jours de mai, lorsque le danger des gelées n'existe plus et que les jeunes plantes ont une hauteur de cinq à sept centimètres, elles sont dépotées en plein air, soit dans des grands pots de vingt-cinq centimètres de diamètre, soit en pleine terre, à la même distance les unes des autres. Il est bon, dans l'un et l'autre cas, de purger préalablement la terre des pots ou le sol des insectes qui peuvent s'y trouver, par une énergique application de sulfure de carbone. C'est le seul moyen de se mettre à l'abri des larves de noctuelle qui exercent quelquefois de grands ravages sur les jeunes plantes, pendant les deux ou trois premiers mois de leur existence. On arrive ainsi, si le sol est de bonne qualité et bien préparé, et en ayant soin d'aider à la végétation par quelques engrais liquides (floral), à obtenir, à la fin de la saison, des tiges de 1 mètre à $1^{m}50$ de longueur et par conséquent des plantes bonnes à être mises en grande culture dès l'année suivante.

On pourrait, dès la première année, au moment du dépotage, introduire le phylloxera dans les pots ou dans le sol où végètent les jeunes plantes, de manière à juger rapidement de la résistance

de ces dernières. Pour diverses raisons, nous avons jusqu'ici suivi un autre procédé, M. de Grasset et moi.

Au mois de mars de l'année qui suit le semis, toutes les plantes les plus vigoureuses sont transplantées en plein vignoble, après un bon défoncement, aux distances habituelles; et, à partir de ce moment, la plantation est traitée comme une vigne ordinaire. Comme elle a été établie sur une vieille vigne morte du phylloxera et arrachée dès la seconde année, toutes les plantes se trouvent envahies par l'insecte. A la troisième année, les racines des plus belles sont visitées avec attention, et si l'examen n'y fait pas reconnaître la présence de l'ennemi, elles sont empoisonnées par des poignées de racines phylloxérées. La même opération est répétée une seconde fois, l'année suivante, pour les pieds où le phylloxera n'a pas encore paru, de telle sorte qu'à la quatrième ou cinquième année il est possible de juger exactement du degré de résistance à l'insecte, tant par le développement des plantes que par l'état de leurs racines.

Dès l'année qui suit celle du semis, quelques plantes mâles se mettent à fleur, un plus grand nombre à la suivante, la plupart à la troisième année. Les plantes fertiles fleurissent plus tardivement; je dois dire cependant que nous avons obtenu deux fois, sur sept à huit mille hybrides, quelques baies dès l'année après le semis, malgré la transplantation par conséquent. Mais ce sont là de très rares exceptions, et, en général, les plantes fertiles ne commencent à fleurir qu'à la troisième ou à la quatrième année, et ce n'est guère avant la sixième ou la septième que la grappe présente ses caractères définitifs.

Tous les hybrides, même ceux qui seront presque complètement réfractaires au mildiou lorsqu'ils seront arrivés à l'état adulte, sont extrêmement sensibles à cette maladie dans leur jeune âge et jusqu'à la fin de la première année. On n'arrive souvent à les sauver que par des traitements répétés à la bouillie, les hybrides à trois quarts de sang européen surtout. Pour ces derniers, une application de bouillie tous les dix jours est indispensable pendant la première année.

Il faut dire encore que parmi les hybrides américains aussi bien que dans les franco-américains où l'espèce sauvage américaine a fonctionné comme père, la moitié aux deux tiers environ des plantes sont mâles; il y a en outre pas mal de plantes coulardes et seulement un quart à un cinquième de plantes d'une fertilité normale (hermaphrodites). Parmi ces dernières, les deux tiers environ sont à étamines longues, et le reste à étamines courtes. Toutes ces proportions varient dans des limites assez larges d'une hybridation (c'est-à-dire suivant la nature des parents) à l'autre.

Il en est de même pour la résistance au phylloxera : il y a de très grandes variations d'une hybridation à l'autre. Cependant, au milieu de toutes ces irrégularités, l'influence de l'hérédité se révèle de la façon la plus frappante, de sorte qu'on peut affirmer, en thèse générale, que la résistance des hybrides est d'autant plus grande que la somme de celle des deux parents l'est davantage elle-même. L'influence prépondérante du père, dont il a été question, masque ou contrarie quelquefois cette loi, mais ne la détruit pas. Et, à ce propos, je dois ajouter que c'est vraisemblablement à la prépondérance du père qu'est dû ce fait si remarquable chez quelques hybrides de l'immunité phylloxérique complète : la résistance du père passant intégralement dans ses descendants sans se laisser affaiblir en eux par la non-résistance de la mère.

Mais je m'aperçois qu'au lieu de me borner, comme je le voulais d'abord, à faire connaître la technique de l'hybridation et la culture des hybrides, je me suis laissé entraîner plus d'une fois à des considérations d'un ordre différent, relatives à l'effet des diverses combinaisons que peut réaliser l'expérimentateur. Or, c'est là un sujet encore bien obscur, qui ne pourra être abordé avec fruit que lorsque plusieurs années d'observations seront venues compléter mon expérience actuelle.

15 janvier 1891.

BIBLIOGRAPHIE.

Henry Bouschet. *Collection de vignes à jus rouge obtenues par le semis, après croisement des cépages méridionaux avec le Teinturier.* (*Bulletin de la Société d'Agriculture de l'Hérault,* 1864, p. 339.)

V. Ganzin. *De l'Hybridation artificielle.* (*Revue scientifique,* 30 juillet 1881.)

Millardet. *Notes sur les vignes américaines,* 1881, chapitre V.

P. Viala. *Les Hybrides Bouschet,* 1886, introduction.

G. Couderc. *Étude sur l'hybridation artificielle de la vigne.* (*Congrès viticole de Mâcon,* 1887.)

G. Davin. *Hybridation des vignes.* (*La Provence horticole,* mars 1888.)

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

MÉMOIRE

SUR UNE SURFACE D'ONDES RÉFLÉCHIES CORRÉLATIVE DE CELLE DE FRESNEL,
ET SUR LA DOUBLE SÉRIE
DE SURFACES D'ONDES MOYENNES DONT ELLE EST LA LIMITE,

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

INTRODUCTION.

Si l'on se reporte à la manière dont la surface de Fresnel s'est présentée à nos recherches dans le premier Mémoire d'Optique que nous avons publié au tome V (3e série) du présent Recueil, on constatera immédiatement que, lorsque les pseudo-surfaces, ou plutôt les pseudo-plans auxquels la surface en question est rapportée, se transforment en trois plans coordonnés, celle-ci disparaît aussitôt en s'éloignant à l'infini.

Cela provient de ce que les trois derniers paramètres (sur neuf) qui figurent dans son équation deviennent nuls, par le seul fait d'un semblable choix de coordonnées, tout comme étaient déjà devenus nuls les six premiers par le fait d'avoir introduit, en son lieu, l'hypothèse que les conditions dites *minima* étaient identiquement vérifiées.

Nous supposerons, dans tout ce qui suit, qu'au lieu d'être vérifiées de la sorte, ces mêmes conditions sont simplement satisfaites, et nous admettrons, en outre, que la surface normo-directive dont procède celle de Fresnel se trouve actuellement rapportée à trois *surfaces coordonnées minima*, autres que des plans. Il sera facile alors de déduire de notre lieu général une nouvelle surface d'ondes dérivant des sections centrales d'un certain hyperboloïde à une nappe que nous ferons bientôt con-

européenne par le pollen mâle d'une espèce américaine ou inversement en fécondant la plante américaine hermaphrodite de la même espèce par le pollen (provenant d'étamines longues) de la même variété européenne, nous a amenés depuis quelque temps, M. de Grasset et moi, à la constatation d'un fait général très curieux et des plus importants : l'*influence prépondérante de la plante qui fonctionne comme père* dans ces croisements.

Nous possédons, en effet, des centaines de chaque sorte de ces hybrides, par exemple *Aramon* × *Rupestris* (1) et *Rupestris* × *Aramon*, *Alicante-Bouschet* × *Rupestris* et *Rupestris* × *Alicante-Bouschet*, etc.; d'une manière générale et sauf de rares exceptions, les hybrides dans lesquels le *Rupestris* est le père sont plus résistants au phylloxera, à grappes beaucoup moins grandes et à fruits beaucoup plus petits que cela n'a lieu dans les hybridations inverses. En hybridant l'européen par l'américain, on obtient une très haute résistance au phylloxera, mais la fructification est insuffisante. Par l'opération inverse, la fructification est bonne, mais la résistance a disparu en grande partie. Cette loi, qui semble ne souffrir que très peu d'exceptions, a, on le conçoit facilement, une importance considérable au point de vue pratique.

Il est vrai que Darwin ne l'admet pas comme loi générale, mais pour le genre vigne elle existe certainement, et il est bien probable que ce n'est pas là un fait isolé. On en connaît d'autres, sinon identiques, du moins analogues. Ainsi, dans un ouvrage récent (2), M. Nietner nous dit (p. 409) : « L'expérience a appris que dans les hybrides artificiels de rosiers, la fleur a plus d'analogie pour la forme avec celle de la plante mère, tandis que le feuillage et le port général se rapprochent davantage de ceux du père... L'influence du père se fait sentir surtout dans l'habitus général de l'hybride, mais elle est également prépondérante dans la couleur de sa fleur. » Aussi conseille-t-il de choisir pour mères les variétés à fleurs doubles et d'une belle forme et pour pères

(1) Le signe × signifie fécondé par.
(2) Th. Nietner, *Die Rose*. Berlin, 1880.

celles à belle végétation et dont la fleur est remarquable par un coloris brillant, lors même qu'elles seraient peu doubles.

Je n'ai pas fait de recherches bibliographiques sur ce sujet, mais je ne doute guère qu'on ne puisse trouver dans la littérature botanique d'assez nombreux exemples de cas où l'influence tantôt du père, tantôt de la mère, sur certains organes de l'hybride, se montre prépondérante.

Tous les hybrides faits jusqu'à présent par M. de Grasset et moi ne contiennent du sang européen et américain que dans deux proportions différentes : ou bien un demi de chaque ou trois quarts de l'un contre un quart de l'autre.

Parmi les premiers, les plus simples sont constitués par un cépage européen seulement et une seule espèce américaine *(Aramon × Rupestris)*. D'autres sont un peu plus complexes et formés d'un seul cépage européen et de deux espèces américaines *(Aramon × Cordifolia-Rupestris)*. Enfin il y en a qui sont constitués par deux cépages européens et deux espèces américaines *(Aramon-Rupestris × Carignane-Riparia)*. L'étude de ces diverses combinaisons ne nous a encore révélé aucune particularité importante.

Quant aux hybrides à trois quarts de sang, s'ils contiennent trois quarts de sang américain *(Chasselas-Riparia × Riparia)*, ils sont tellement semblables à l'américain et leur fructification par conséquent est tellement rudimentaire, qu'ils ne peuvent servir que de porte-greffes. Il est permis d'attendre des hybrides à trois quarts de sang européen (*Chasselas-Riparia × Chasselas* ou inversement) une fertilité notable, mais leur résistance au phylloxera et au mildiou sera-t-elle suffisante? Deux à trois années seront encore nécessaires pour répondre à cette question ([1]).

([1]) J'ai déjà traité brièvement ce sujet dans une notice insérée au volume du *Congrès international d'agriculture*, tenu à Paris en 1889, p. 714 : *Notes sur les résultats de l'hybridation de la vigne.*

V

Éducation des Hybrides.

Cette notice serait incomplète si je n'indiquais les précautions à prendre pour la conservation et le semis des graines obtenues par l'hybridation aussi bien que les soins particuliers qui sont nécessaires aux hybrides pendant leur jeune âge.

On laisse les grappes fécondées artificiellement aussi longtemps que possible sur les souches, afin d'en parfaire la maturité. Après les avoir cueillies par le beau temps, on les suspend en un lieu sec, puis, en décembre ou janvier, lorsque la pourriture y apparaît, on sépare avec précaution les pépins des râpes, pulpes, etc. On les lave et on jette ceux qui surnagent et sont creux. Ceux qui tombent au fond de l'eau sont essuyés dans un linge fin, et quand ils ne présentent plus de traces d'humidité, mis dans une boîte en lieu sec.

Au premier printemps, un mois avant l'époque du semis, les pépins sont immergés pendant cinq à six jours dans l'eau pure en faible épaisseur (un centimètre à deux) pour que l'air s'y renouvelle facilement. Durant cet intervalle on change l'eau deux ou trois fois.

On les retire alors. On remplit de très petits pots à fleurs de terre de jardin ou de bruyère humide jusqu'à un centimètre du bord. On tasse la terre et on dépose dessus les pépins sortant de l'eau. On recouvre d'un centimètre de sable fin humide. Les pots sont placés dans des assiettes où on maintient un peu d'eau et recouverts d'une lame de verre. Ils sont conservés à une température basse ou modérée.

Cette stratification dure trois semaines ou un mois. Elle a pour

effet de rendre les germinations plus nombreuses et la levée plus rapide et plus régulière.

On peut semer en plein air ou sur couche chaude. Dans ce dernier cas, sous l'influence d'une température comprise entre vingt et trente-cinq degrés centigrades, suivant les heures de la nuit et de la journée, vers le quinzième jour paraissent les premières plantes, et au trentième la germination est terminée. Lorsqu'on obtient, en moyenne, quatre-vingts germinations pour cent pépins semés, on a lieu d'être satisfait.

En plein air, la germination dure deux ou trois fois plus longtemps. Un bon tiers des graines ne germe pas ou trop tard ou seulement l'année suivante.

Nous avons l'habitude, M. de Grasset et moi, de semer les graines les plus précieuses sur couche chaude et sous châssis, en pots de sept à huit centimètres de diamètre, dans de la terre de bruyère qui a été purgée préalablement de toute espèce d'insectes par le sulfure de carbone. Dans les premiers jours de mai, lorsque le danger des gelées n'existe plus et que les jeunes plantes ont une hauteur de cinq à sept centimètres, elles sont dépotées en plein air, soit dans des grands pots de vingt-cinq centimètres de diamètre, soit en pleine terre, à la même distance les unes des autres. Il est bon, dans l'un et l'autre cas, de purger préalablement la terre des pots ou le sol des insectes qui peuvent s'y trouver, par une énergique application de sulfure de carbone. C'est le seul moyen de se mettre à l'abri des larves de noctuelle qui exercent quelquefois de grands ravages sur les jeunes plantes, pendant les deux ou trois premiers mois de leur existence. On arrive ainsi, si le sol est de bonne qualité et bien préparé, et en ayant soin d'aider à la végétation par quelques engrais liquides (floral), à obtenir, à la fin de la saison, des tiges de 1 mètre à 1m50 de longueur et par conséquent des plantes bonnes à être mises en grande culture dès l'année suivante.

On pourrait, dès la première année, au moment du dépotage, introduire le phylloxera dans les pots ou dans le sol où végètent les jeunes plantes, de manière à juger rapidement de la résistance

de ces dernières. Pour diverses raisons, nous avons jusqu'ici suivi un autre procédé, M. de Grasset et moi.

Au mois de mars de l'année qui suit le semis, toutes les plantes les plus vigoureuses sont transplantées en plein vignoble, après un bon défoncement, aux distances habituelles; et, à partir de ce moment, la plantation est traitée comme une vigne ordinaire. Comme elle a été établie sur une vieille vigne morte du phylloxera et arrachée dès la seconde année, toutes les plantes se trouvent envahies par l'insecte. A la troisième année, les racines des plus belles sont visitées avec attention, et si l'examen n'y fait pas reconnaître la présence de l'ennemi, elles sont empoisonnées par des poignées de racines phylloxérées. La même opération est répétée une seconde fois, l'année suivante, pour les pieds où le phylloxera n'a pas encore paru, de telle sorte qu'à la quatrième ou cinquième année il est possible de juger exactement du degré de résistance à l'insecte, tant par le développement des plantes que par l'état de leurs racines.

Dès l'année qui suit celle du semis, quelques plantes mâles se mettent à fleur, un plus grand nombre à la suivante, la plupart à la troisième année. Les plantes fertiles fleurissent plus tardivement; je dois dire cependant que nous avons obtenu deux fois, sur sept à huit mille hybrides, quelques baies dès l'année après le semis, malgré la transplantation par conséquent. Mais ce sont là de très rares exceptions, et, en général, les plantes fertiles ne commencent à fleurir qu'à la troisième ou à la quatrième année, et ce n'est guère avant la sixième ou la septième que la grappe présente ses caractères définitifs.

Tous les hybrides, même ceux qui seront presque complètement réfractaires au mildiou lorsqu'ils seront arrivés à l'état adulte, sont extrêmement sensibles à cette maladie dans leur jeune âge et jusqu'à la fin de la première année. On n'arrive souvent à les sauver que par des traitements répétés à la bouillie, les hybrides à trois quarts de sang européen surtout. Pour ces derniers, une application de bouillie tous les dix jours est indispensable pendant la première année.

Il faut dire encore que parmi les hybrides américains aussi bien que dans les franco-américains où l'espèce sauvage américaine a fonctionné comme père, la moitié aux deux tiers environ des plantes sont mâles; il y a en outre pas mal de plantes coulardes et seulement un quart à un cinquième de plantes d'une fertilité normale (hermaphrodites). Parmi ces dernières, les deux tiers environ sont à étamines longues, et le reste à étamines courtes. Toutes ces proportions varient dans des limites assez larges d'une hybridation (c'est-à-dire suivant la nature des parents) à l'autre.

Il en est de même pour la résistance au phylloxera : il y a de très grandes variations d'une hybridation à l'autre. Cependant, au milieu de toutes ces irrégularités, l'influence de l'hérédité se révèle de la façon la plus frappante, de sorte qu'on peut affirmer, en thèse générale, que la résistance des hybrides est d'autant plus grande que la somme de celle des deux parents l'est davantage elle-même. L'influence prépondérante du père, dont il a été question, masque ou contrarie quelquefois cette loi, mais ne la détruit pas. Et, à ce propos, je dois ajouter que c'est vraisemblablement à la prépondérance du père qu'est dû ce fait si remarquable chez quelques hybrides de l'immunité phylloxérique complète : la résistance du père passant intégralement dans ses descendants sans se laisser affaiblir en eux par la non-résistance de la mère.

Mais je m'aperçois qu'au lieu de me borner, comme je le voulais d'abord, à faire connaître la technique de l'hybridation et la culture des hybrides, je me suis laissé entraîner plus d'une fois à des considérations d'un ordre différent, relatives à l'effet des diverses combinaisons que peut réaliser l'expérimentateur. Or, c'est là un sujet encore bien obscur, qui ne pourra être abordé avec fruit que lorsque plusieurs années d'observations seront venues compléter mon expérience actuelle.

15 janvier 1891.

BIBLIOGRAPHIE.

Henry Bouschet. *Collection de vignes à jus rouge obtenues par le semis, après croisement des cépages méridionaux avec le Teinturier.* (*Bulletin de la Société d'Agriculture de l'Hérault*, 1864, p. 339.)

V. Ganzin. *De l'Hybridation artificielle.* (*Revue scientifique*, 30 juillet 1881.)

Millardet. *Notes sur les vignes américaines*, 1881, chapitre V.

P. Viala. *Les Hybrides Bouschet*, 1886, introduction.

G. Couderc. *Étude sur l'hybridation artificielle de la vigne.* (*Congrès viticole de Mâcon*, 1887.)

G. Davin. *Hybridation des vignes.* (*La Provence horticole*, mars 1888.)

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

MÉMOIRE

SUR UNE SURFACE D'ONDES RÉFLÉCHIES CORRÉLATIVE DE CELLE DE FRESNEL,
ET SUR LA DOUBLE SÉRIE
DE SURFACES D'ONDES MOYENNES DONT ELLE EST LA LIMITE,

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

INTRODUCTION.

Si l'on se reporte à la manière dont la surface de Fresnel s'est présentée à nos recherches dans le premier Mémoire d'Optique que nous avons publié au tome V (3ᵉ série) du présent Recueil, on constatera immédiatement que, lorsque les pseudo-surfaces, ou plutôt les pseudo-plans auxquels la surface en question est rapportée, se transforment en trois plans coordonnés, celle-ci disparaît aussitôt en s'éloignant à l'infini.

Cela provient de ce que les trois derniers paramètres (sur neuf) qui figurent dans son équation deviennent nuls, par le seul fait d'un semblable choix de coordonnées, tout comme étaient déjà devenus nuls les six premiers par le fait d'avoir introduit, en son lieu, l'hypothèse que les conditions dites *minima* étaient identiquement vérifiées.

Nous supposerons, dans tout ce qui suit, qu'au lieu d'être vérifiées de la sorte, ces mêmes conditions sont simplement satisfaites, et nous admettrons, en outre, que la surface normo-directive dont procède celle de Fresnel se trouve actuellement rapportée à trois *surfaces coordonnées minima*, autres que des plans. Il sera facile alors de déduire de notre lieu général une nouvelle surface d'ondes dérivant des sections centrales d'un certain hyperboloïde à une nappe que nous ferons bientôt con-

naître, de la même façon que la surface de Fresnel dérive des sections centrales de l'ellipsoïde générateur que l'on sait.

En signalant à l'attention des physiciens et des géomètres cette nouvelle surface d'ondes, nous conviendrons de l'appeler *surface spécifique des ondes réfléchies,* sauf à fournir dans un dernier paragraphe les raisons qui nous ont amené à adopter cette dénomination.

On verra par cette étude que, malgré la différence considérable de forme qu'elle présente avec celle de Fresnel, la nouvelle surface ne laisse pas que de s'en rapprocher par ses propriétés essentielles. C'est ainsi que, à l'exemple de cette dernière, elle possède deux axes optiques et quatre ombilics; qu'elle donne naissance à une double série de surfaces d'ondes moyennes réfléchies invariablement comprises entre ses deux nappes : que, par l'intermédiaire de ces dernières surfaces, elle engendre, soit des cônes, soit des courbes isochromatiques, etc., etc. Venons, sans plus tarder, à l'exposé de ces propriétés diverses.

I

Surface spécifique des ondes réfléchies. Ses principales propriétés.

—

1. Remontons à l'équation générale de la surface normo-directive (I, n° 14). Si l'on y suppose que les trois pseudo-surfaces coordonnées, de quelconques qu'elles sont, deviennent minima, ce qui exige que l'on ait (I, n° 2) :

$$(\lambda) \qquad r' = q'', \quad p'' = r, \quad q = p',$$

la surface elle-même prendra convenablement le nom de *surface normo-directive minima*, et aura pour équation :

$$(\Sigma_g) \qquad \begin{vmatrix} p - \frac{1}{R^2} & q & p'' & X \\ q & q' - \frac{1}{R^2} & r' & Y \\ p'' & r' & r'' - \frac{1}{R^2} & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là, à proprement parler, la *surface générale ou absolue de l'onde* rapportée à des coordonnées *rectangulaires*. On a vu au lieu cité que, pour la construire, il suffit de porter sur la normale, au plan

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

des longueurs égales aux demi-axes des diverses sections centrales faites, par ce même plan, dans la *quadrique génératrice :*

$$pX^2 + q'Y^2 + r''Z^2 + 2r'YZ + 2p''ZX + 2qXY = 1.$$

Bornons-nous à en examiner ici les deux variétés suivantes :

1° Lorsque les conditions minima sont identiquement vérifiées, c'est-à-dire quand

$$r' = q' = p' = r = q = p' = 0,$$

l'équation (Σ_0) se réduit à

$$(\Sigma)\ \begin{cases} (q'r'X^2 + r'pY^2 + pq'Z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ -[(q' + r')X^2 + (r' + p)Y^2 + (p + q')Z^2] + 1 = 0. \end{cases}$$

C'est la surface spécifique des ondes réfractées ou de Fresnel, pourvu toutefois que l'on y suppose p, q', r' positifs. Elle a alors pour quadrique génératrice l'*ellipsoïde*

$$pX^2 + q'Y^2 + r'Z^2 = 1,$$

résultats déjà connus (I, 21).

2° Lorsque les trois pseudo-surfaces coordonnées minima se transforment en *surfaces minima*, ce qui exige qu'avec les conditions (μ) ci-dessus on ait aussi

$$p = q' = r' = 0,$$

l'équation (Σ_0) devient

$$(\Sigma')\ \begin{cases} (r'^2X^2 + p'^2Y^2 + q^2Z^2 - 2p'qYZ - 2qr'ZX - 2r'p'XY)(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ -2(r'YZ + p'ZX + qXY) - 1 = 0. \end{cases}$$

Celle de la quadrique génératrice correspondante est alors

$$2r'YZ + 2p'ZX + 2qXY = 1,$$

et représente un *hyperboloïde à une nappe,* si l'on a : $r'p'q < 0$ ou, à *deux nappes*, si l'on a : $r'p'q > 0$.

Dans le premier cas, le lieu Σ' se compose d'une nappe fermée entourant l'origine et de deux nappes infinies contenues dans le trièdre OXYZ et son symétrique. — Dans le second, la nappe fermée devient imaginaire et l'on n'a plus qu'une nappe infinie unique occupant la région de l'espace adjacente à celle qu'occupaient les nappes infinies du premier cas.

Nous désignerons par Σ'_1 et Σ'_2 ces deux ramifications du lieu Σ'; mais c'est à la première surtout Σ'_1 que nous allons nous

attacher; et c'est elle tout particulièrement que nous qualifierons du nom convenu de surface spécifique des ondes réfléchies.

2. Pour donner, à la fois, plus de netteté et de symétrie à nos formules, nous y remplacerons r', p'', q par $-f$, $-g'$, $-h''$ les quantités f, g', h'', étant supposées essentiellement positives.

Les conditions caractéristiques des systèmes triples de surfaces minima seront alors

$$(1)\qquad \begin{cases} p = 0, & r' = q'' = -f, \\ q' = 0, & p'' = r = -g', \\ r'' = 0; & q = p' = -h''. \end{cases}$$

De son côté, le lieu Σ' s'écrira :

$$(2)\quad \begin{cases} (f^2X^2 + g'^2Y^2 + h''^2Z^2 - 2g'h''YZ - 2h''fZX - 2fg'XY)(X^2+Y^2+Z^2) \\ \qquad + 2(fYZ + g'ZX + h''XY) - 1 = 0, \end{cases}$$

avec

$$(3)\qquad 2fYZ + 2g'ZX + 2h''XY + 1 = 0,$$

pour hyperboloïde générateur (à une nappe).

Occupons-nous d'abord des cônes asymptotes de ces deux surfaces.

En faisant abstraction du cône imaginaire $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. le cône asymptote proprement dit de la surface Σ'_1 est

$$(4)\quad f^2X^2 + g'^2Y^2 + h''^2Z^2 - 2g'h''YZ - 2h''fZX - 2fg'XY = 0,$$

équation qu'on pourrait aussi écrire

$$\sqrt{fX} \pm \sqrt{g'Y} \pm \sqrt{h''Z} = 0.$$

Il est capable d'une infinité de trièdres tri-rectangles *circonscrits* et, notamment, du trièdre des coordonnées positives O X Y Z dont il touche les faces suivant les génératrices de contact :

$$g'Y - h''Z = 0,\quad h''Z - fX = 0,\quad fX - g'Y = 0.$$

On a de même, pour le cône asymptote de l'hyperboloïde (3).

$$fYZ + g'ZX + h'XY = 0. \tag{5}$$

Ce second cône est capable d'une infinité de trièdres trirectangles *inscrits* et, en particulier, du trièdre OXYZ dont il contient les arêtes.

Reprenons maintenant la surface Σ'_1 et cherchons à en déterminer les axes optiques. C'est ce qui fera l'objet des théorèmes suivants :

3. Théorème I. — *La surface spécifique des ondes réfléchies possède deux axes optiques, toujours réels.*

Nous appliquerons tout de suite le calcul à cette proposition, la démonstration géométrique qu'on en peut donner, en s'appuyant sur le mode de construction de la surface, étant on ne peut plus simple.

A cet effet, rapportons tout d'abord l'équation (2) aux coordonnées polaires. En désignant par (λ, μ, ν) les cosinus directeurs d'un rayon vecteur quelconque ρ, on aura

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho^4} - 2\,(f\mu\nu + g'\nu\lambda + h'\lambda\mu)\,\dfrac{1}{\rho^2} \\ -(f^2\lambda^2 + g'^2\mu^2 + h'^2\nu^2 - 2g'h'\mu\nu - 2h'f\nu\lambda - 2fg'\lambda\mu)\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0. \end{array} \right.$$

Résolvant, on constate que la quantité sous radical est décomposable de trois manières différentes en une somme de deux carrés. En particulier, si l'on fait

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= f(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda^2 + \nu^2) - g'\lambda\mu\,(\lambda^2 + \mu^2) - h'\lambda\nu\,(\lambda^2 + \nu^2), \\ \mathcal{B} &= g'\lambda\nu\,(\lambda^2 + \mu^2) - h'\lambda\mu\,(\lambda^2 + \nu^2), \\ \mathcal{C} &= f\mu\nu + g'\nu\lambda + h'\lambda\mu, \end{aligned}$$

l'un de ces trois modes de décomposition donnera :

$$\frac{1}{\rho^2} = \mathcal{C} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda^2 + \nu^2)}}, \tag{6'}$$

d'où l'on conclut, incidemment, que le lieu

$$\frac{1}{\rho^2} = f\mu\nu + g'\nu\lambda + h'\lambda\mu,$$

c'est-à-dire l'hyperboloïde à deux nappes

$$fYZ + g'ZX + h'XY = 1,$$

est une surface *diamétrale*, par rapport aux deux nappes, l'une fermée et les deux autres infinies, de la surface Σ'_1.

Mais ce qui résulte principalement de la forme (6'), c'est que, pour qu'il y ait contact réel entre ces deux sortes de nappes, il faut et il suffit que l'on ait $\mathfrak{T} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, ce qui revient à

$$(7) \qquad \frac{f}{\lambda(\mu^2+\nu^2)} = \frac{g'}{\mu(\nu^2+\lambda^2)} = \frac{h'}{\nu(\lambda^2+\mu^2)}.$$

Un tel système représente trois cônes du *troisième degré*, et dont le sommet est à l'origine. La question revient donc à prouver que ces trois cônes ont toujours deux génératrices communes réelles, et deux seulement.

Pour y parvenir, nous allons faire voir que les solutions réelles communes aux équations (7) définissent les deux normales élevées à l'origine sur le couple des plans cycliques réels de l'hyperboloïde générateur (3).

Rappelons, à cet effet, que, pour calculer ce couple particulier de plans cycliques, il faut partir de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}(2fYZ + 2g'ZX + 2h'XY) - S(X^2+Y^2+Z^2) \\ \quad = k(\lambda X + \mu Y + \nu Z)(\lambda' X + \mu' Y + \nu' Z).\end{array}\right.$$

S désignant tout spécialement la racine moyenne de l'équation en S de cet hyperboloïde, savoir :

$$(8) \qquad S^3 - (f^2 + g'^2 + h'^2)S - 2fg'h' = 0,$$

et (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') représentant (grâce à l'indéterminée k) non pas seulement les paramètres directeurs, mais les cosinus directeurs, des normales à ses deux plans cycliques réels, c'est-à-

dire, par définition, les cosinus directeurs des axes optiques de la surface Σ'_1.

Égalés entre eux, deux à deux, les coefficients des mêmes variables nous donnent d'abord

$$\lambda\lambda' = \mu\mu' = \nu\nu' = -\frac{S}{k};$$

puis, finalement,

$$(9) \qquad \frac{2f\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{2g'\nu\lambda}{\nu^2+\lambda^2} = \frac{2h'\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} = -S.$$

On en déduit

$$\frac{f}{\lambda(\mu^2+\nu^2)} = \frac{g'}{\mu(\nu^2+\lambda^2)} = \frac{h'}{\nu(\lambda^2+\mu^2)},$$

ce qui nous ramène précisément aux trois cônes (7). Le théorème se trouve donc démontré.

4. Pour en faciliter l'application, nous poserons

$$(10) \qquad \frac{\mu}{\nu} = u, \quad \frac{\nu}{\lambda} = v, \quad \frac{\lambda}{\mu} = w,$$

et, par suite,

$$\lambda^2\left(1 + v^2 + \frac{1}{w^2}\right) = \mu^2\left(1 + w^2 + \frac{1}{u^2}\right) = \nu^2\left(1 + u^2 + \frac{1}{v^2}\right) = 1;$$

il viendra alors

$$(11) \qquad \frac{2f}{u+\frac{1}{u}} = \frac{2g'}{v+\frac{1}{v}} = \frac{2h'}{w+\frac{1}{w}} = -S,$$

ou bien

$$(11') \qquad \frac{2f}{U} = \frac{2g'}{V} = \frac{2h'}{W} = -S,$$

en faisant

$$(12) \qquad u+\frac{1}{u} = U, \quad v+\frac{1}{v} = V, \quad w+\frac{1}{w} = W.$$

5. THÉORÈME II. — *Les axes optiques de la surface spécifique des ondes réfléchies appartiennent à trois couples de plans respectivement conduits suivant les arêtes du trièdre inscrit dont est capable le cône asymptote de la surface, les deux plans de chaque couple étant également inclinés sur celui des trois plans bissecteurs de ce même trièdre qui leur correspond.*

Pour démontrer cette propriété, éliminons v, par exemple, des formules (11); on obtiendra, eu égard à la relation $v = \frac{1}{uw}$, le système à deux inconnues

$$u^2 - \frac{f(1 + w^2)}{h'w} u + 1 = 0,$$
$$u^2 - \frac{g'w - f}{(fw - g')w} = 0.$$

Posant, pour abréger

$$\frac{f^2 + g'^2 + h'^2}{fg'} = m, \quad \frac{f^2 + g'^2 - h'^2}{fg'} = n,$$

on en déduit l'équation réciproque

$$w^6 - mw^5 + 3w^4 - 2nw^3 + 3w^2 - mw + 1 = 0,$$

qui, traitée par la méthode ordinaire, se transforme (12) en la suivante :

$$fg' W^3 - (f^2 + g'^2 + h'^2) W^2 + 4h'^2 = 0.$$

Si l'on eût commencé l'élimination par u ou par w, on serait arrivé aux équations similaires

$$h'fV^3 - (f^2 + g'^2 + h'^2) V^2 + 4g'^2 = 0,$$
$$g'h'U^3 - (f^2 + g'^2 + h'^2) U^2 + 4f^2 = 0.$$

Observons soigneusement que ces trois équations ont toutes leurs racines réelles, deux positives et une négative, car leur condition commune de réalité est :

$$(f^2 + g'^2 + h'^2)^3 - 27 f^2g'^2h'^2 > 0,$$

condition toujours satisfaite.

On pourrait dire encore que, par (11'), elles dérivent rationnellement de l'équation en S (8) de l'hyperboloïde générateur.

Cela posé, les formules (10) et (12) nous permettent d'écrire :

$$U = u + \frac{1}{u} = \operatorname{tg} \varpi_x + \cot \varpi_x = \frac{2}{\sin 2\varpi_x},$$
$$V = v + \frac{1}{v} = \cot \varpi_y + \operatorname{tg} \varpi_y = \frac{2}{\sin 2\varpi_y},$$
$$W = w + \frac{1}{w} = \cot \varpi_z + \operatorname{tg} \varpi_z = \frac{2}{\sin 2\varpi_z},$$

les angles ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z étant, comme dans notre précédent Mémoire, mesurés sur les plans coordonnés et à partir des mêmes axes respectifs.

Il s'ensuit que, des trois racines réelles fournies par chacune des équations du 3[me] degré précédentes, la plus grande, c'est-à-dire celle qui surpasse 2 (ce nombre sépare les deux racines positives), est seule acceptable.

Pour fixer les idées, choisissons, par exemple, la plus grande des racines de l'équation en W. Puisque l'on a : $\sin 2\varpi_z = \frac{2}{W}$, les Tables feront connaître deux angles *complémentaires,* l'un ϖ_z correspondant à w, l'autre $\frac{\pi}{2} - \varpi_z$ correspondant à $\frac{1}{w}$ qui détermineront, par eux-mêmes, deux directions également inclinées dans le plan horizontal sur la bissectrice $X = Y$, et qui ne seront autres, d'après le premier théorème, que les projections horizontales des deux axes optiques de Σ'_1. Comme les équations en U et V conduiraient à des résultats analogues par rapport aux bissectrices $Y = Z$ et $Z = X$, le théorème se trouve par là même établi.

II

Étude de quelques cas particuliers remarquables.

—

6. I. — Supposons que des trois paramètres f, g', h', deux soient égaux sans être nuls; que l'on ait, par exemple : $f = g' > 0$.

D'après (9) cette hypothèse implique l'une ou l'autre des conditions

$$\nu^2 = \lambda\mu, \qquad \lambda = \mu.$$

Comme la première n'apporterait que d'insignifiantes simplifications dans les calculs qui précèdent, nous ne nous y arrêterons pas. Mais il n'en est pas de même de la seconde. En exigeant que les axes optiques soient situés dans le plan bissecteur $X = Y$, elle donne lieu à de notables particularités.

Et d'abord, les relations (9) se réduisent ici à

$$\frac{2f\lambda\nu}{\lambda^2 + \nu^2} = h' = -S.$$

De la valeur de ce rapport, nécessairement plus petit que f, il résulte que le cas qui nous occupe ne peut pas se présenter sans que l'on ait $f > h'$.

On voit, en outre, que les quantités u et v sont actuellement les racines de l'équation réciproque

(13) $$m^2 - 2\frac{f}{h'}m + 1 = 0.$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut donc avoir $f > h'$, ce qui est la même condition de possibilité que tout à l'heure.

Remontons aux équations du 3me degré du paragraphe précé-

dent, et en particulier à celles en S et en W. On trouve qu'elles peuvent se décomposer chacune en deux facteurs réels, savoir :

$$(S + h')(S^2 - h'S - 2f^2) = 0,$$
$$(W - 2)(f^2W^2 - h'^2W - 2h'^2) = 0.$$

De leur côté, les plans cycliques de l'hyperboloïde générateur ont pour équation

$$(X + Y + uZ)(X + Y + vZ) = 0.$$

Ils se coupent donc suivant la bissectrice ($X + Y = 0$, $Z = 0$).

En prenant cette bissectrice pour axe des Y', et sa conjuguée ($X - Y = 0$, $Z = 0$) pour axe des X', on formera un nouveau trièdre (médian) de coordonnées OX'Y'Z ou OX'Y'Z' dont nous aurons souvent à faire usage.

Fig. 1.

Rapportés à ce nouveau système d'axes, les plans cycliques deviennent

$$\left(\frac{X'}{Z'} + \frac{u}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X'}{Z'} + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Leurs traces $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$ sont symétriques par rapport à l'axe transverse de l'hyperbole génératrice *principale*.

$$(14) \qquad h'X'^2 + 2\sqrt{2}\,fZ'X' + 1 = 0;$$

et, puisque les axes optiques sont les normales à ces traces, ils ont donc eux-mêmes pour équation

$$\left(\frac{X'}{Z'} - \frac{\sqrt{2}}{u}\right)\left(\frac{X'}{Z'} - \frac{\sqrt{2}}{v}\right) = 0,$$

ou bien (13), en développant,

$$(15) \qquad X'^2 - 2\sqrt{2}\,\frac{f}{h'}\,Z'X' + 2Z'^2 = 0.$$

Quant aux bissectrices de ces axes, elles coïncident avec les axes de figure OA et OB de l'hyperbole principale précédente et sont représentées par l'équation

$$(16) \qquad X'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{h'}{f}\,Z'X' - Z'^2 = 0.$$

Cette équation, que l'on peut sans doute écrire directement, peut aussi se calculer comme il suit :

Entre deux directions conjuguées quelconques I et J prises dans l'hyperbole (14) et comptées à partir de OZ', on a la relation générale

$$(17) \qquad \frac{\sin(I + J)}{\sin I \sin J} = \cot I + \cot J = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{h'}{f};$$

or, pour $J = I + \frac{\pi}{2}$, il vient $\operatorname{tg} 2I = -2\sqrt{2}\,\frac{f}{h'}$, ou, équivalemment,

$$(16') \qquad \operatorname{tg}^2 I - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{h'}{f}\operatorname{tg} I - 1 = 0,$$

ce qui nous ramène bien, en effet, à l'équation (16).

7. Tous les résultats qui précèdent peuvent s'obtenir par une voie, sinon plus simple, du moins plus directe, en rapportant d'abord la surface Σ' au trièdre médian $OX'Y'Z'$ et la coupant ensuite par le plan $Y' = 0$. On trouve ainsi que la section produite se compose des deux coniques

$$h'X'^2 + h'Z'^2 - 1 = 0,$$
$$h'Z'^2 - 2\sqrt{2}\, fZ'X' + 1 = 0,$$

c'est-à-dire d'un cercle correspondant à la nappe fermée et d'une hyperbole correspondant à la double nappe infinie de Σ'_1. On constate, du reste, que cette dernière courbe n'est autre que l'hyperbole principale (14) que l'on aurait fait tourner de 90° autour de son centre.

La surface conjuguée Σ'_2 donnerait semblablement

$$h'X'^2 + h'Z'^2 + 1 = 0,$$
$$h'Z'^2 - 2\sqrt{2}\, X'Z' - 1 = 0,$$

c'est-à-dire un cercle imaginaire et l'hyperbole conjuguée de celle obtenue dans le premier cas.

Les points communs aux deux coniques du 1er système, savoir : U, V, U', V' (*fig.* 1), sont les quatre ombilics de la surface Σ'_1.

Comme le couple des sécantes, issues de l'origine, qui joignent ces points, deux à deux, a pour équation

$$X'^2 - 2\sqrt{2}\frac{f}{h'} Z'X' + 2Z'^2 = 0,$$

nous retrouvons là exactement celle des axes optiques (15), ainsi qu'il fallait d'ailleurs s'y attendre.

On peut donner à ces axes une forme très simple, en posant $\frac{h'}{f} = \sin\chi$, chose qui nous est permise, en vertu de l'hypothèse $f > h'$ (n° 6). Il vient, en effet,

$$\left(\frac{X'}{Z'} - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}\right)\left(\frac{X'}{Z'} - \sqrt{2}\cot\frac{\chi}{2}\right) = 0.$$

Leur angle θ a donc pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \theta = \cot \chi = \sqrt{\frac{f^2}{h'^2}} - 1.$$

Il s'annule pour $f = g' = h'$, alors que les deux axes coïncident avec la direction $X = Y = Z$, bissectrice du trièdre primitif des coordonnées.

8. II. — Lorsqu'on a, par exemple, $f = 0$ avec $g' \gtrless h'$, l'équation (6) se réduit à

$$\frac{1}{\rho^4} - 2(g'\nu + h'\mu)\frac{\lambda}{\rho^2} - (g'\mu - h'\nu)^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0.$$

Comme celle-ci a nécessairement deux racines imaginaires, on en conclut que dans la surface Σ'_1 correspondante, la nappe fermée n'existe pas.

L'hyperboloïde générateur (3) devient alors un cylindre hyperbolique dont l'axe est situé dans le plan des YZ et y a pour équation $g'Z + h'Y = 0$.

Rapportée au trièdre OX'Y'Z', la section de ce cylindre par le plan $Y' = 0$ n'est autre que l'hyperbole *médiane*

$$h'X'^2 + g'\sqrt{2}\,Z'X' + 1 = 0.$$

Enfin, de l'équation en S, savoir : $S^3 - S(g'^2 + h'^2) = 0$, on conclut que le cylindre est à directrice principale hyperbolique équilatère.

Le cas de $g' = 0$ avec $f \gtrless h'$ donnerait des résultats analogues. L'axe du cylindre générateur est alors dans le plan des ZX, et l'hyperbole médiane a pour équation

$$h'X'^2 + f\sqrt{2}\,Z'X' + 1 = 0,$$

ce qui ne diffère de la précédente que par le seul changement de g' en f.

9. III. — Supposons maintenant que l'on ait $f = g' = 0$. L'équation (2) de la surface Σ_1' se réduira à

$$h'^2Z^2(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2h'XY - 1 = 0,$$

ou bien, dans le second système de coordonnées, à

$$h'^2Z'^2(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) + h'(X'^2 - Y'^2) - 1 = 0.$$

La section par le plan $Y' = 0$ se compose du cercle réel $h'X'^2 + h'Z'^2 - 1 = 0$, et des deux droites parallèles imaginaires $h'Z'^2 + 1 = 0$.

Inversement, la section par le plan $X' = 0$ donne le cercle imaginaire $h'Y'^2 + h'Z'^2 + 1 = 0$ et les parallèles réelles $h'Z'^2 - 1 = 0$.

Quant à la forme générale de la surface, on voit sans peine qu'elle se compose de deux nappes symétriques par rapport au plan des $X'Y'$, et comprises entre les deux plans parallèles $Z' = \pm \frac{1}{\sqrt{h'}}$. Ces nappes s'étendent à l'infini de part et d'autre de l'axe des Y'.

Le nouveau lieu, non plus que ceux du numéro précédent, n'a pas d'ombilics, car son hyperboloïde générateur est devenu le cylindre hyperbolique $h'(X'^2 - Y'^2) + 1 = 0$, dont les sections circulaires sont des lignes droites.

III

Double série de surfaces d'ondes moyennes réfléchies. Cônes : lignes isochromatiques. — Surface chromatique.

---

10. 1° En supposant toujours que les trois pseudo-surfaces coordonnées se soient transformées en surfaces minima autres que des plans, l'équation de la 1re série de surfaces angulo-directives

(II, n° 13) où l'on aurait préalablement remplacé i par $\frac{\pi}{2} - i = j$ et r', p'', q par $-f, -g', -h'$, devient

$$(18)\begin{cases} (f^2X^2 + g'^2Y^2 + h''^2Z^2 - 2g'h'YZ - 2h'fZX - 2fg'XY)(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ \qquad + 2(fYZ + g'ZX + h'XY)\sin j - 1 = 0, \end{cases}$$

ou, en coordonnées polaires,

$$(18')\begin{cases} \frac{1}{\rho^4} - 2(f\mu\nu + g'\nu\lambda + h'\lambda\mu)\frac{\sin j}{\rho^2} \\ -(f^2\lambda^2 + g'^2\mu^2 + h''^2\nu^2 - 2g'h'\mu\nu - 2h'f\nu\lambda - 2fg'\lambda\mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0, \end{cases}$$

ce que nous écrirons, d'une manière abrégée, ainsi :

$$(18') \qquad \frac{1}{\rho^4} - 2\mathcal{C}\frac{\sin j}{\rho^2} - \mathcal{D}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0.$$

Par des considérations identiques à celles développées dans notre second Mémoire (n° 5), on constate que c'est là l'équation générale d'une 1re série de surfaces d'ondes moyennes Σ'_{m_1} constamment comprises entre les deux nappes de la surface des ondes réfléchies Σ'_1. — La seconde série se déduit immédiatement de la première par le simple changement de $\sin j$ en $\cos j$.

Indiquons, en peu de mots, les principales propriétés de cette double série de surfaces corrélatives.

En résolvant l'équation (18'), on trouve, d'après (6') :

$$(19) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \mathcal{C}\sin j \pm \sqrt{\frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda^2 + \nu^2)} - \mathcal{C}^2\cos^2 j}.$$

Si l'on y considère, pour un instant, λ, μ, ν comme désignant les cosinus directeurs de l'un quelconque des axes optiques, ce qui implique, on s'en souvient, $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, le radical sera imaginaire, sauf pour la valeur limite $j = \frac{\pi}{2}$ qui fait coïncider Σ'_{m_1} axec Σ'_1.

En rendant ensuite à λ, μ, ν leur variabilité, on voit aussitôt, eu égard à la continuité du radical, qu'il sera toujours possible

de déterminer, pour chaque valeur particulière attribuée à j, depuis son maximum, $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à son minimum zéro, une infinité de systèmes de valeurs de ces cosinus annulant le radical et déterminant, par suite, autour de chaque axe optique, un cône à l'intérieur duquel ρ sera imaginaire.

Il en est donc ici comme pour la surface de Fresnel (II, n° 3). Quatre cavités ombilicales isolées et croissantes se forment respectivement autour des points U, V, U′, V′. Après s'être rapprochées peu à peu, de part et d'autre, du centre, elles arrivent à n'en plus former que deux, symétriques par rapport à ce point, et telles que leurs courbes de contact, en s'éloignant de plus en plus, finissent par coïncider avec les directrices, à l'infini, des deux nappes du cône asymptote de Σ'_1. A partir de ce moment, la surface Σ'_{m_1} cesse d'exister.

2° Cherchons l'équation générale du cône *isochromatique* Γ'_{m_1} circonscrit à la surface variable Σ'_{m_1}. Il suffit pour cela d'écrire que l'équation (18) admet une racine double, ce qui donne

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &(fYZ + g'ZX + h'XY)^2 \sin^2 j \\ &\qquad + (f^2X^2 + g'^2Y^2 + \ldots)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0; \end{aligned} \right.$$

ou bien, d'après (18′),

$$(20')\quad \left\{ \begin{aligned} &(f\mu\nu + g'\nu\lambda + h'\lambda\mu)^2 \sin^2 j \\ &\qquad + (f^2\lambda^2 + g'^2\mu^2 + \ldots)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $j = \frac{\pi}{2}$, on retrouve les axes optiques de Σ'_1, et pour $j = 0$, son cône asymptote.

En coupant le cône Γ'_{m_1} par un plan variable, on obtiendra les perspectives sur ce plan des diverses courbes *isochromatiques* ou de contact de Γ'_{m_1} avec Σ'_{m_1}. Ces courbes seront toujours des lignes fermées tant que le plan sécant rencontrera les trois arêtes du trièdre OXYZ. Elles consisteront d'abord en deux *anneaux* isolés qui, après s'être rejoints sur Σ'_1, se transformeront en des *lemniscatoïdes* bientôt sensiblement circulaires, toujours grandissantes

du reste, et s'éloignant à l'infini jusqu'à la directrice du cône asymptote de cette surface [1].

3° Formons, en dernier lieu, l'équation de la surface *chromatique* K'_1 sur laquelle est située la variété complète des courbes isochromatiques. Il suffit, pour cet effet, d'éliminer sin j entre les équations de Γ'_{m_1} et de Σ'_{m_1}; on trouve ainsi

$$(21)\quad (f^2X^2+g'^2Y^2+h'^2Z^2-2g'h'YZ-2h'fZX-2fg'XY)(X^2+Y^2+Z^2)+1=0.$$

On arriverait au même résultat en éliminant sin j entre l'équation de Γ'_{m_1} et celle de l'hyperboloïde (moyen)

$$(H'_{m_1})\qquad (fYZ+g'ZX+h'XY)\sin j=1.$$

Nous terminerons cette rapide analyse par la remarque suivante :

Comme le premier facteur, dans l'équation (21), est négatif quand il s'agit de la surface Σ'_1, et positif s'il s'agit de la surface Σ'_2 (n° 1), on en conclut qu'il n'existe pas, pour cette dernière surface, de surface chromatique K'_2 *réelle*. En remontant aux équations (18) et (20), on reconnaîtra qu'il faut en dire autant de la surface des ondes moyennes réfléchies Σ'_2 et du cône isochromatique Γ'_{m_2}.

IV

Cas où les surfaces précédentes sont de révolution.

11. Supposons que l'on ait simultanément $f=g'=h'>0$.

La surface Σ'_1 se décompose alors en une sphère réelle et un hyperboloïde de révolution à deux nappes, savoir :

$$(22)\quad \begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{1}{h'}, \\ X^2+Y^2+Z^2-2YZ-2ZX-2XY=-\dfrac{1}{h'}. \end{cases}$$

---

[1] Ainsi en est-il, expérimentalement, pour le *cercle blanc*, dit d'*Ulloa*, cercle dont le demi-diamètre apparent diffère peu, en moyenne, de celui du cône asymptote de la surface des ondes réfléchies.

Ces deux lieux partiels se touchent en un point *ombilical* situé sur leur axe de révolution commun qui est la bissectrice $X = Y = Z$.

Pour la surface conjuguée Σ'_2, la sphère précédente devient imaginaire et l'hyperboloïde qui l'accompagne n'est plus qu'à une nappe.

En nous en tenant toujours à la surface Σ'_1, examinons comment se modifient pour elle, dans le cas actuel, les lieux géométriques Σ'_{m_1}, Γ'_{m_1}, H'_{m_1}, K'_1.

A cet effet, opérons d'abord un changement de coordonnées, en prenant pour axe des Z_1, la bissectrice $X = Y = Z$; pour axe des X_1, la perpendiculaire à cette semi-droite qui est située dans le plan $X = Y$ et au-dessous du plan horizontal; enfin, pour axe des Y_1, l'horizontale $(X + Y = 0, Z = 0)$.

1° Au moyen des formules de transformation adaptées à ce cas, savoir :

$$X\sqrt{6} = X_1 - Y_1\sqrt{3} + Z_1\sqrt{2},$$
$$Y\sqrt{6} = X_1 + Y_1\sqrt{3} + Z_1\sqrt{2},$$
$$Z\sqrt{3} = -X_1\sqrt{2} + Z_1,$$

les quadriques (22) prennent la forme

$$(22') \qquad \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = \dfrac{1}{h'}, \\ 2X_1^2 + 2Y_1^2 - Z_1^2 = -\dfrac{1}{h'}, \end{cases}$$

et, conséquemment, en coordonnées polaires, celle-ci :

$$(22'') \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = h'; \quad \frac{1}{\rho_1^2} = h'(3\nu_1^2 - 2),$$

les nouveaux cosinus directeurs du rayon vecteur ρ_1 étant représentés par $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

2° On verra, de la même manière, que la surface générale de la 1re série des ondes moyennes réfléchies Σ'_{m_1} devient

$$h'^2(2X_1^2+2Y_1^2-Z_1^2)(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)-h'(X_1^2+Y_1^2-2Z_1^2)\sin j-1=0,$$

ou, équivalemment :

$$\frac{1}{\rho_1^4} - h'(3\nu_1^2 - 1)\frac{\sin j}{\rho_1^2} + h'^2(3\nu_1^2 - 2) = 0.$$

Cette seconde forme, d'une discussion très facile, montre bien que notre surface est de révolution autour de OZ_1.

3° Passons au cône isochromatique Γ'_{m_1}. Il se décompose ici en deux cônes de révolution du second degré qui, après simplification, peuvent s'écrire

$$X_1^2 + Y_1^2 \mp \frac{2\cos j}{3 \pm \cos j} Z_1^2 = 0;$$

ou encore,

$$\nu_1^2 = \frac{3 \pm \cos j}{3(1 \pm \cos j)}.$$

Le second de ces cônes se déduit du premier en changeant i en $\pi + i$. Il suffit donc de retenir celui-ci qui, d'ailleurs, correspond seul à la surface Σ'_{m_1}.

4° Les courbes isochromatiques sont invariablement des cercles, tant par elles-mêmes que par leurs perspectives sur le plan sécant variable $Z_1 = \zeta_1$.

5° L'hyperboloïde moyen H'_{m_1} a pour équation

$$h'(X_1^2 + Y_1^2 - 2Z_1^2)\sin j + 2 = 0,$$

et, en coordonnées polaires,

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{h'}{2}(3\nu_1^2 - 1)\sin j.$$

6° Enfin, la surface chromatique K'_1 est représentée par l'équation

$$h'^2(2X_1^2 + 2Y_1^2 - Z_1^2)(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) + 1 = 0,$$

ou par celle-ci :

$$\frac{1}{\rho_1^4} = h'^2(3\nu_1^2 - 2).$$

Toutes ces dernières surfaces sont donc, elles aussi, de révolution autour de OZ_1.

12. Il est facile de donner au cas-limite qui nous occupe un degré de généralité de plus, en l'associant au cas-limite correspondant de la surface de Fresnel, c'est-à-dire à celui où cette surface dégénère en une sphère (double), en vertu de l'égalité supposée des paramètres p, q', r'.

On trouve que la surface générale de l'onde Σ_o (n° 1) se décompose, dans ce cas encore, en deux lieux distincts qui, rapportés au trièdre OXYZ, ont pour équations

$$(23)\left\{\begin{aligned} (r' + h')(X^2 + Y^2 + Z^2) - 1 &= 0, \\ (r' - h')(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2h'(YZ + ZX + XY) - 1 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Le premier est une sphère. — Le second donne des ellipsoïdes de révolution (aplatis), autour de $X = Y = Z$, tant que l'on a $r' > 2h'$. Il donne deux plans parallèles et tangents, sur l'axe, à la sphère précédente pour $r' = h'$, et enfin, des hyperboloïdes à deux nappes, pour $r' < 2h'$.

Ces résultats sont mis immédiatement en évidence par le trièdre $OX_1 Y_1 Z_1$. Les équations (23) deviennent, en effet,

$$(23')\quad\left\{\begin{aligned} (r' + h')(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) - 1 &= 0, \\ (r' - 2h')(X_1^2 + Y_1^2) + (r' + h')Z_1^2 - 1 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Rapportées aux coordonnées polaires, on trouve plus simplement encore :

$$23'')\qquad \frac{1}{\rho_1^2} = r' + h'; \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = r' + h'(3\nu_1^2 - 2).$$

V

Relations géométriques entre la surface spécifique des ondes réfléchies et la variété des cônes de Malus relatifs à une direction donnée.

13. I. — Rappelons d'abord que, d'après notre premier Mémoire, le cône proprement dit de Malus relatif à une direction donnée OL ou (λ, μ, ν) et rapportée au trièdre fixe $Oxyz$, a pour équation :

$$(\mu d\nu - \nu d\mu)\, x + (\nu d\lambda - \lambda d\nu)\, y + (\lambda d\mu) - \mu d\lambda)\, z = 0.$$

Si donc, après avoir fait coïncider avec ce dernier trièdre le trièdre mobile OXYZ, on pose, pour abréger,

$$\mathfrak{p}_L = p\lambda + p'\mu + p''\nu,$$

....

et qu'on représente par Ω_L la fonction homogène du second degré $\mathfrak{p}_L\lambda + \mathfrak{q}_L\mu + \mathfrak{r}_L\nu$, le plan tangent, suivant OL, au cône précédent pourra, eu égard à nos formules (I, n° 12), s'écrire d'abord :

$$(\pi_1) \begin{cases} (\nu\mathfrak{q}_L - \mu\mathfrak{r}_L)(\nu Y - \mu Z) + (\lambda\mathfrak{r}_L - \nu\mathfrak{p}_L)(\lambda Z - \nu X) \\ \qquad + (\mu\mathfrak{p}_L - \lambda\mathfrak{q}_L)(\mu X - \lambda Y) = 0, \end{cases}$$

puis, après quelque transformations faciles,

$$(\pi_1') \quad (\mathfrak{p}_L - \lambda\Omega_L)\, X + (\mathfrak{q}_L - \mu\Omega_L)\, Y + (\mathfrak{r}_L - \nu\Omega_L)\, Z = 0.$$

Ceci posé, admettons, à nouveau, que les conditions (1) soient satisfaites; la trace OT_1, sur le plan des XY, par exemple, de notre plan tangent, aura pour équation générale :

$$(24) \quad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_1 = -\frac{2f\lambda\mu\nu - (h'\mu + g'\nu)(\mu^2 + \nu^2 - \lambda^2)}{2g'\lambda\mu\nu - (h'\lambda + f\nu)(\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2)}.$$

Ce résultat se simplifie lorsqu'on convient de prendre la direction OL dans le plan médian $X = Y$, pour lequel on a $\lambda = \mu$. Il vient en effet alors, après suppression (détail utile à noter) du facteur ν dans les deux termes :

$$(24') \qquad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_1 = -\frac{2f\lambda^2 - h'\lambda\nu - g'\nu^2}{2g'\lambda^2 - h'\lambda\nu - f\nu^2}.$$

Ceci nous conduit à reprendre pour trièdre des coordonnées le trièdre médian $OX'Y'Z'$ que nous avons déjà introduit au n° 6. Avec ce choix, et en faisant

$$\nu = \cos I, \qquad \lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin I,$$

la trace OT_1 deviendra

$$(24'') \quad \frac{Y'}{X'} = \operatorname{tg} A'_1 = -\frac{\dfrac{h'}{\sqrt{2}} \sin 2I + (f + g') \cos 2I}{f - g'} = \frac{\mathfrak{M}}{f - g'}.$$

Dans cette formule, l'angle I, compté à partir de OZ', peut être regardé comme l'*angle de réflexion* du rayon OL, en tant qu'issu d'un ébranlement central produit à l'origine et soumis, quelle qu'en soit la cause, aux conditions minima (1).

14. *Cas particuliers.* — Arrêtons-nous au cas où l'on aurait $\mathfrak{M} = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} 2\, I_p = -\dfrac{\sqrt{2}(f + g')}{h'}$, en même temps que $f \gtrless g'$, et cherchons à quelle *incidence* I_p (la suite justifiera cette notation) correspond ce cas particulier.

1° Nous ferons observer pour cela que si l'on coupe par le plan $Y' = 0$ l'hyperboloïde générateur (3), après l'avoir rapporté au trièdre $OX'Y'Z'$, on trouvera pour équation de la section produite,

$$(\mathrm{h}) \qquad h'X'^2 + \sqrt{2}(f + g')Z'X' + 1 = 0.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes sont représentées par :

$$X' = 0, \qquad \frac{X'}{Z'} = -\frac{\sqrt{2}(f + g')}{h'} = \operatorname{tg} 2I_p.$$

Il s'ensuit que, dans le cas général, l'angle I_p définit la bissectrice de l'angle obtus des asymptotes de l'hyperbole *médiane* (h).

2° Lorsque, avec $\mathfrak{M} = 0$, on a aussi $f = g'$, on tombe dans un cas *singulier* ou *critique*. En effet, la trace OT_1 du plan tangent

est alors indéterminée et, par suite, le cône de Malus qui lui correspond est évanouissant. De son côté, l'hyperbole médiane (h) se confond avec l'hyperbole principale (14). Et comme on a présentement : $\operatorname{tg} 2\, I_p = -2\sqrt{2}\,\frac{f}{h'}$ ou, ce qui revient au même :

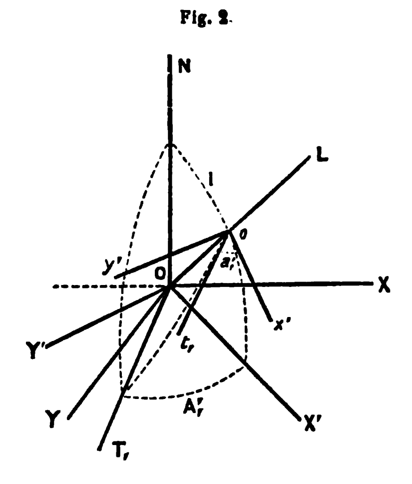
$$(25) \qquad \operatorname{tg}^2 I_p - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h'}{f}\operatorname{tg} I_p - 1 = 0,$$

on en conclut (n° 6) que la direction singulière qui nous occupe est un des axes principaux de l'hyperboloïde générateur ou, pour préciser, *la bissectrice aiguë* OA *de l'angle des axes optiques de la surface des ondes réfléchies.*

3° Enfin, lorsque avec $\mathfrak{M}b = 0$, on a, à la fois, $f = g' = h'$, il vient : $\operatorname{tg} 2\, I_{p_1} = -2\sqrt{2}$; d'où $\operatorname{tg} I_{p_1} = \sqrt{2}$. La direction singulière correspondante OA_1 est celle de l'axe de révolution $X = Y = Z$, lequel est alors (nous y reviendrons plus tard) *l'axe de polarisation absolue du rayon réfléchi* OL.

15. Donnons de nouveau à OL une direction quelconque dans le plan $Y = 0$, plan que, par parenthèse, il nous sera commode

Fig. 2.



d'appeler *le plan de profil,* par opposition avec le plan $X' = 0$ qui sera *le plan de front.*

Par le point o où OL perce la sphère dont le centre est l'origine et le rayon égal à l'unité, menons le plan tangent (p) à cette sphère; puis considérons l'angle plan a'_1 qui mesure le dièdre X'LOT$_1$ dont A'_1 est la trace horizontale. Entre a'_1, A'_1 et I, on a la relation générale

$$\operatorname{tg} A'_1 = \operatorname{tg} a'_1 \cos I.$$

Si donc on substitue à OX', OY', les deux tangentes à angle droit ox', oy' situées dans le plan (p) et dont la première appartient au plan de profil, on pourra, très avantageusement, comme la suite le fera voir, remplacer l'expression (24') par celle-ci qui définit la nouvelle trace Ot$_1$ sur le nouveau trièdre azimutal ox'y'L ou ox'y'z'$_1$, à savoir :

$$(24''') \qquad \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} a'_1 = \frac{\mathcal{M}}{(f-g')\cos I}.$$

16. II. — L'orthogonal du cône de Malus donne lieu à une étude analogue à la précédente.

Rapporté tout d'abord au trièdre fixe $Oxyz$ (I, n° 8), son équation est

$$x d\lambda + y d\mu + z d\nu = 0.$$

Après la coïncidence de ce trièdre avec le trièdre mobile, l'équation du plan tangent à ce cône, suivant OL, peut, en vertu des notations introduites (n° 13), s'écrire :

$$(\pi_2) \quad (\nu \mathfrak{A}_L - \mu \mathfrak{B}_L) X + (\lambda \mathfrak{B}_L - \nu \mathfrak{P}_L) Y + (\mu \mathfrak{P}_L - \lambda \mathfrak{A}_L) L = 0.$$

On en déduit, pour la trace horizontale OT$_2$ de ce même plan :

$$(26) \qquad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_2 = \frac{f(\mu^2 - \nu^2) - h'\lambda\nu + g'\lambda\mu}{g'(\lambda^2 - \nu^2) - h'\mu\nu + f\lambda\mu}.$$

Avant de passer outre, appliquons cette formule à l'incidence normale, en y faisant $\lambda = \mu = 0$; $\nu = 1$. On trouve pour représenter OT$_2$, l'équation :

$$fX - g'Y = 0.$$

Donc: *la trace horizontale du plan tangent au cône orthogonal de Malus relatif à la normale d'une surface minima (qui fait partie d'un système triple) coïncide avec l'arête du contact du cône asymptote de la surface spécifique des ondes réfléchies correspondante.*

On peut vérifier facilement ce résultat au moyen du cône lui-même dont l'équation est ici, d'après (I, n° 9) :

$$(h'X + fZ)X - (h'Y + g'Z)Y = 0.$$

Supposons, en second lieu, que OL soit situé dans le plan de profil, ce qui exige que l'on ait $\lambda = \mu$; il vient alors

$$(26') \qquad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_2 = \frac{(f+g')\lambda^2 - h'\lambda\mu - f\nu^2}{(f+g')\lambda^2 - h'\lambda\nu - g'\nu^2}.$$

Rapportée au trièdre médian OX′Y′Z′, cette trace prend la forme

$$(26'') \quad \frac{Y'}{X'} = \operatorname{tg} A'_2 = \frac{(f-g')\cos^2 I}{\frac{h'}{\sqrt{2}}\sin 2I + (f+g')\cos 2I} = -\frac{(f-g')\cos^2 I}{\mathfrak{M}}.$$

Pour $\mathfrak{M} = 0$ et $f = g'$, elle est indéterminée et le cône lui-même évanouissant. C'est le cas singulier déjà rencontré (n° 13).

Passant au 3e trièdre des coordonnées $\mathbf{o}\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$, la trace OT_2 devenue Ot_2 aura pour équation

$$(26''') \qquad \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'} = \operatorname{tg} \mathbf{a}'_2 = -\frac{(f-g')\cos I}{\mathfrak{M}}.$$

De ce résultat comparé avec (24‴) on conclut :

$$\operatorname{tg} \mathbf{a}'_1 \operatorname{tg} \mathbf{a}'_2 = -1,$$

et, par suite, $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_1 \pm \frac{\pi}{2}$, ce qui est une vérification de l'orthogonalité des deux plans tangents le long de leur génératrice commune OL.

On peut ajouter que la projection sur le plan horizontal des XY

de l'angle droit $t_1 o t_2$ est, *dans tous les cas*, le supplément de l'angle $T_1 O T_2$ des traces primitives, ainsi qu'on peut s'en convaincre, soit par la géométrie élémentaire, soit par le calcul.

16. Arrivons maintenant à la double série des cônes moyens et complémentaires relatifs à cette même direction OL.

De tout ce que nous avons dit antérieurement sur ces cônes, il résulte que les deux séries sont respectivement représentées par les équations générales

$$\mathfrak{C}_1 \sin i + \mathfrak{C}_2 \cos i = 0,$$
$$\mathfrak{C}_1 \cos i - \mathfrak{C}_2 \sin i = 0,$$

les polynômes $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ désignant (I, n° 10) les premiers membres des équations des deux cônes limites, qui sont celui de Malus et son orthogonal.

Il en résulte que les équations des plans tangents suivant OL à chacune des deux séries de cônes, et, par suite, celles des traces horizontales de ces plans, pourront se déduire des calculs déjà faits à l'aide de la loi de formation mise en évidence par les équations ci-dessus.

S'il s'agit, par exemple, des traces OT_{i_1} des plans tangents relatifs à la 1re série, on trouvera, par rapport au trièdre médian, notamment, et après avoir rétabli, chose essentielle, le facteur ν ou cos I que nous avions supprimé (n° 13),

$$(27') \quad \frac{Y'}{X'} = \operatorname{tg} A'_{i_1} = -\cos I \frac{\mathfrak{M} \sin i + (f - g') \cos I \cos i}{\mathfrak{M} \cos i - (f - g') \cos I \sin i}.$$

Pour $\mathfrak{M} = 0$ et $f = g'$, il y a, ici encore, indétermination pour OT_{i_1} et évanouissement simultané pour tous les cônes de la série.

Passant au trièdre azimutal, il vient

$$(27'') \quad \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} a'_{i_1} = -\frac{1 + \operatorname{tg} a'_1 \operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} a'_1 - \operatorname{tg} i} = -\cot(a'_1 - i) = \operatorname{tg}(a'_2 - i);$$

d'où l'on conclut : $a'_{i_1} = (a'_1 - i) \pm \frac{\pi}{2} = a'_2 - i$, ce qui est encore une vérification (I, n° 10).

La seconde série donnerait lieu, pour la trace OT_{i_2}, à un calcul analogue que l'on peut éviter en remplaçant simplement i par $i \pm \frac{\pi}{2}$ dans les formules déjà trouvées.

Il vient ainsi

$$(28''') \quad \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} a'_{i_2} = \frac{\operatorname{tg} a'_1 - \operatorname{tg} i}{1 + \operatorname{tg} a'_1 \operatorname{tg} i} = \operatorname{tg}(a'_1 - i) = -\cot(a'_2 - i).$$

Comparant avec (27'''), on en déduit

$$\operatorname{tg} a'_{i_1} \operatorname{tg} a'_{i_2} = -1,$$

et, par suite, $a'_{i_2} = a'_{i_1} \pm \frac{\pi}{2}$, ce qui est la généralisation de la formule d'orthogonalité obtenue entre les deux plans tangents-limites de chaque série.

VI

Retour à la surface de Fresnel. — En quoi consistent pour elle les propriétés précédentes.

---

18. 1° Supposons, à nouveau, que l'on ait identiquement

$$r' = q'' = p'' = r = q = p' = 0,$$

et faisons

$$p = \frac{1}{a^2}, \quad q' = \frac{1}{b^2}, \quad r'' = \frac{1}{c^2}.$$

Comme la surface de Fresnel a, dans tout cristal, une orientation fixe, si l'on désigne par (λ', μ', ν') les cosinus des angles que fait avec OZ ou OZ' le rayon *extraordinaire* réfracté de Huyghens, OL', on aura pour déterminer ces cosinus les formules générales :

$$\lambda' = \cos\varphi \sin I, \quad \mu' = \sin\varphi \sin I, \quad \nu' = \cos I,$$

l'angle φ (mis comme simplification au lieu de ϖ_z) étant compté sur le plan des XY, à partir de OX.

Cela posé, il suit du n° 13 que la trace horizontale OT_1 du plan tangent, suivant OL', au cône proprement dit de Malus ayant pour équation générale :

$$(\mathfrak{P}_L - \lambda' \Omega_L) X + (\mathfrak{Q}_L - \mu' \Omega_L) Y = 0,$$

nous donne, pour le cas actuel :

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_1 = \frac{\lambda'}{\mu'} \frac{c^2 (a^2 - b^2) \mu'^2 + b^2 (a^2 - c^2) \nu'^2}{c^2 (a^2 - b^2) \lambda'^2 - a^2 (b^2 - c^2) \nu'^2}.$$

Lorsque $a = b$, on a simplement $\operatorname{tg} A_1 = -\frac{\lambda'}{\mu'} = -\cot \varphi$; d'où $A_1 = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$; et s'il arrive que $a = b = c$, l'angle A_1 devient indéterminé.

Mettant de côté ces cas exceptionnels, faisons tourner le trièdre OXYZ autour de OZ d'un angle φ tel que le nouveau plan des Z'X' contienne OL' (sans qu'il coïncide pour cela avec le plan d'incidence). Ceci exige que l'on ait d'abord les relations

$$\frac{Y}{X} = \frac{X' \sin \varphi + Y' \cos \varphi}{X' \cos \varphi - Y' \sin \varphi} = \frac{\mu' X' + \lambda' Y'}{\lambda' X' - \mu' Y'},$$

lesquelles conduisent à cette nouvelle équation de OT_1 :

$$\frac{Y'}{X'} = \operatorname{tg} A'_1 = \frac{\nu'^2}{\lambda' \mu'} \frac{b^2 (a^2 - c^2) \lambda'^2 + a^2 (b^2 - c^2) \mu'^2}{c^2 (a^2 - b^2)}.$$

Pour passer au trièdre azimutal $\mathbf{ox'y'z'}$, il suffit de diviser le second nombre par ν' ou cos I. On aura donc

$$\frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'} = \operatorname{tg} \mathbf{a}'_1 = \frac{\nu'}{\lambda' \mu'} \frac{b^2 (a^2 - c^2) \lambda'^2 + a^2 (b^2 - c^2) \mu'^2}{c^2 (a^2 - b^2)}.$$

Introduisant l'angle ϖ_0 que font les axes optiques avec OZ, on peut écrire plus simplement encore :

$$\frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'} = \frac{(\cot \varphi + \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varpi_0) \cos I}{\sin^2 \varpi_0}.$$

2° Considérons l'orthogonal du cône de Malus relatif à OL'. La trace OT_2 de son plan tangent est, d'après le n° 16,

$$(\nu' \mathfrak{A}_L - \mu' \mathfrak{B}_L)\, X + (\lambda' \mathfrak{B}_L - \nu' \mathfrak{P}_L)\, Y = 0.$$

On en déduit, après avoir supprimé le facteur ν' dans les deux termes :

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A_2 = \frac{\mu'}{\nu'} \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varpi_0,$$

résultat remarquable puisqu'il est indépendant de l'angle I lui-même.

Pour $a = b$, il vient $\operatorname{tg} A_2 = \operatorname{tg} \varphi$ et, par suite, $A_2 = \varphi$.

Rapportée au trièdre $\mathbf{o x' y' z'}$, la trace précédente prend la forme

$$\frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'} = \operatorname{tg} A'_1 = - \lambda' \mu' \frac{c^2 (a^2 - b^2)}{b^2 (a^2 - c^2) \lambda'^2 + a^2 (b^2 - c^2) \mu'^2},$$

ce qui ne simplifie pas, il est vrai, mais nous prépare une vérification. Effectivement, le passage au troisième trièdre $\mathbf{o x' y' z'}$ fournit, pour la trace $\mathrm{O}\mathbf{t}_2$, l'équation suivante :

$$\frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{x}'} = \operatorname{tg} \mathbf{a}'_2 = - \frac{\lambda' \mu'}{\nu'} \frac{c^2 (a^2 - b^2)}{b^2 (a^2 - c^2) \lambda'^2 + a^2 (b^2 - c^2) \mu'^2};$$

d'où, par comparaison, $\operatorname{tg} \mathbf{a}'_1 \operatorname{tg} \mathbf{a}'_2 = -1$, comme cela devait être *a priori*.

Nous ferons observer, à ce propos, que si l'on substituait le plan des axes optiques ou des ZX à celui des XY, on trouverait par des calculs semblables :

$$\frac{X'}{Z'} = \operatorname{tg} \mathbf{b}'_2 = \frac{\lambda' \nu'}{\mu'} \frac{b^2 (a^2 - c^2)}{c^2 (a^2 - b^2) \lambda'^2 - a^2 (b^2 - c^2) \nu'^2},$$

avec

$$\lambda' = \sin \varphi \sin \mathrm{I}, \quad \mu' = \cos \mathrm{I}, \quad \nu' = \cos \varphi \sin \mathrm{I},$$

l'angle φ (mis pour ϖ_Y) étant ici compté sur le plan des ZX.

3° Quant aux traces horizontales des plans tangents aux deux

séries de cônes moyens et complémentaires, relatifs à OL', il suffira de leur appliquer les formules (27‴) et (28‴), à la seule condition d'y remplacer $\mathfrak{a}'_1$ et $\mathfrak{a}'_2$ par les valeurs obtenues ci-dessus.

VII

Relations cinématiques entre les deux surfaces d'ondes réfléchies ou réfractées et l'axe instantané de rotation d'un système rigide dans un mouvement à trois variables.

19. Afin de traiter la question avec plus de généralité, remontons aux équations (8) de notre premier Mémoire, équations que nous pouvons désormais écrire convenablement ainsi :

$$\begin{aligned} U_x &= \mathfrak{Q}_L Z - \mathfrak{R}_L Y, \\ U_Y &= \mathfrak{R}_L X - \mathfrak{p}_L Z, \\ U_z &= \mathfrak{p}_L Y - \mathfrak{Q}_L X. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que ces trois composants de la vitesse totale U, suivant les arêtes du trièdre mobile soient nulles, on aura

$$\frac{X}{\mathfrak{p}_L} = \frac{Y}{\mathfrak{Q}_L} = \frac{Z}{\mathfrak{R}_L}, \tag{29}$$

ou, plus explicitement, à cause de la proportionnalité de λ, μ, ν avec $\frac{ds}{dS}, \frac{ds'}{dS}, \frac{ds''}{dS}$.

$$(29') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{X}{pds + p'ds' + p''ds''} &= \frac{Y}{qds + q'ds' + q''ds''} \\ \frac{Z}{rds + r'ds' + r''ds''} &= \frac{\rho}{\Omega_L dS}. \end{aligned} \right.$$

Pour toute valeur assignée aux rapports arbitraires $\frac{ds}{ds''}, \frac{ds'}{ds''}$, c'est-à-dire pour tout déplacement élémentaire de l'origine dans

la direction de l'élément de départ dS suivant OL, les équations précédentes sont celles de l'axe instantané de rotation d'un mouvement à trois variables relatif à un système rigide qu'on supposerait lié au trièdre OXYZ et se déplaçant infiniment peu avec lui dans le voisinage du point O.

Dans le cas exceptionnel où le mouvement du système se réduit à une *translation* infinitésimale, cas dans lequel l'élément dS se met, nécessairement, dans la direction de l'axe instantané OI, on a :

$$(30) \qquad \frac{X}{pX + p'Y + p''Z} = \frac{Y}{qX + q'Y + q''Z} = \frac{Z}{rX + r'Y + r''Z} = \frac{1}{\Omega_I},$$

et, par conséquent,

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} p - \Omega_I & p' & p'' \\ q & q' - \Omega_I & q'' \\ r & r' & r'' - \Omega_I \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons déjà rencontré cette équation (I, n° 9), et nous avons fait observer, au même lieu, que la solution réelle, tantôt unique, tantôt triple, qu'elle admet, correspond à un égal nombre de génératrices réelles communes aux cônes orthogonaux de Malus relatifs aux trois arêtes du trièdre mobile.

Cela posé, désignons toujours par (λ, μ, ν) les cosinus directeurs de OL, bien que devenu l'axe instantané OI. Du système (30) on tire

$$(30') \qquad p\lambda + p'\mu + p''\nu = \mathfrak{P}_I = \lambda\Omega_I,$$

....

et par suite

$$\frac{\mathfrak{P}_I}{\lambda} = \frac{\mathfrak{Q}_I}{\mu} = \frac{\mathfrak{R}_I}{\nu} = \Omega_I.$$

Or, ces conditions rendent *indéterminés* les plans tangents π_1 et π_2 (n°s 13 et 16) du cône de Malus et de son orthogonal relatifs à cet axe instantané et, par eux, la double série concomitante des plans tangents moyens et complémentaires.

On en conclut : *qu'il existe, pour l'axe instantané, au moins*

une direction réelle de l'espace suivant laquelle la variété tout entière des cônes de Malus (une double série) s'évanouit.

Supposons maintenant que les conditions minima soient simplement vérifiées. Il existera, dans ce cas, trois directions réelles jouissant de la propriété précédente. Ces directions, on le sait, ne sont autres que les directions principales de la quadrique génératrice

$$pX^2 + q'Y^2 + r''Z^2 + 2r'YZ + 2p''ZX + 2qXY = 1,$$

et, conséquemment (n° 1), celles des axes principaux de la surface générale de l'onde Σ_g. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Les trois axes principaux de la surface générale ou absolue de l'onde sont trois directions singulières, suivant lesquelles la variété tout entière des cônes de Malus s'évanouit* ([1]).

Il s'ensuit que la surface des ondes réfléchies Σ_1' et la surface des ondes réfractées de Fresnel jouissent de la même propriété.

20. Il ne sera pas sans intérêt de montrer le parfait accord de cette conséquence générale avec les calculs développés au § V notamment.

Le système (30′) appliqué au cas où les conditions (1) ont lieu devient

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_1\lambda + h''\mu + g'\nu &= 0,\\ h''\lambda + \Omega_1\mu + f\nu &= 0,\\ g'\lambda + f\mu + \Omega_1\nu &= 0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} \Omega_1 & h'' & g' \\ h'' & \Omega_1 & f \\ g' & f & \Omega_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\Omega_1^3 - (f^2 + g'^2 + h''^2)\,\Omega_1 + 2fg'h'' = 0.$$

([1]) Nous ne supposons pas que la quadrique génératrice soit de révolution, sans quoi les cônes correspondants à l'axe deviendraient *indéterminés*.

Faisant $\Omega_I = -S$, nous retrouverons précisément l'équation en S (8) de l'hyperboloïde générateur de la surface des ondes réfléchies Σ'_1. Mais il y a plus : du système (32) on tire entre autres relations

$$f(\mu^2 - \nu^2) - h''\lambda\nu + g'\lambda\mu = 0,$$
$$g'(\lambda^2 - \nu^2) - h''\mu\nu + f\lambda\mu = 0.$$

Comparant avec l'équation (26) de la trace OT_2 du plan tangent à l'orthogonal du cône de Malus, on constate que ces relations rendent cette trace indéterminée. Le cône qui lui correspond est donc évanouissant et, avec lui, tous les autres qui en dépendent.

Ainsi se trouve généralisée directement la propriété que nous avions reconnue (n° 13) à la bissectrice aiguë de l'angle des axes optiques, bissectrice qui est, on le sait, un des axes principaux de la surface Σ'_1.

21. Le même genre de considérations est applicable à la surface de Fresnel.

Pour,

$$r' = q'' = p'' = r = q = p' = 0,$$

les équations (30′) deviennent, en effet,

$$(\Omega_{I'} - p)\,X = 0, \quad (\Omega_{I'} - q')\,Y = 0, \quad (\Omega_{I'} - r'')\,Z = 0;$$

faisant $\Omega_{I'} = \frac{1}{S}$, $p = \frac{1}{a^2}$, etc., on en déduit

$$(S - a^2)(S - b^2)(S - c^2) = 0,$$

ce qui définit les trois axes principaux de l'ellipsoïde générateur et, par conséquent, ceux de la surface des ondes réfractées elle-même.

Qu'après cela, ces mêmes axes soient des directions singulières suivant lesquelles toute la variété des cônes de Malus s'évanouit, c'est ce qu'on peut démontrer directement aussi.

En effet, d'après (I, n° 11), les cônes moyens de la 1re série relatifs à OZ, par exemple, ont pour équation générale

$$\frac{X^2}{a^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \cot i . XY + \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Ils sont donc évanouissants, y compris les deux cônes extrêmes correspondants à $i = 0$ et $i = \frac{\pi}{2}$.

VIII

Réalité objective de la nouvelle surface des ondes réfléchies.

22. Parmi les diverses raisons qui peuvent servir à prouver son existence, nous choisirons celles-ci :

1° On sait que les quelques substances qui polarisent complètement la lumière et la chaleur (l'alun, par exemple) le font sous un angle d'incidence I_{p_0} dont la tangente trigonométrique est sensiblement égale à 1,41. Or, si l'on prend la surface des ondes réfléchies Σ'_1 dans le cas où l'on a $f = g' = h'$, c'est-à-dire quand elle est de révolution, son axe OA_0 fait précisément avec la normale un angle tel que $\operatorname{tg} I_{p_0} = \sqrt{2} = 1{,}4142...$ et dont la valeur est de 54° 44′ à peu près. Cet axe de révolution coïncide donc avec l'axe de polarisation *absolue* dont l'expérience démontre la réalité.

2° Pour les substances qui, à l'exemple du verre lui-même, ne polarisent pas complètement la lumière et la chaleur, on substitue à l'angle ou à l'axe de polarisation absolue un angle ou un axe de polarisation *maximum*. Or, puisque, dans l'ordre des faits, le premier de ces axes est manifestement la limite du second, on nous accordera sans peine qu'il doit pareillement en être ainsi dans l'ordre spéculatif, et l'on se trouve, de la sorte, conduit à reconnaître dans ce second axe, soit la bissectrice aiguë de l'angle des

axes optiques de Σ'_1, soit, dans le cas le plus général, l'axe transverse de l'hyperbole médiane qui nous a occupés au § V.

3° Arago a observé, le premier, que les substances qui ne produisent qu'un maximum de polarisation sont telles cependant que, pour des incidences égales à $I_p \pm \delta$, le faisceau réfléchi contient la même proportion de lumière polarisée. Ce phénomène, quelle qu'en soit la cause, concorde pleinement avec la forme de la section produite dans la surface Σ'_1 par le plan d'incidence, si l'on admet que l'on puisse considérer ce dernier plan comme coïncidant avec le plan de profil $X = Y$.

Nous aurons (car il le faut) à revenir incessamment sur cette dernière condition.

4° Dans le voisinage de l'axe de polarisation maximum, on constate des modifications brusques dans le faisceau réfléchi lequel (d'après l'explication reçue) passe subitement de la polarisation rectiligne à la polarisation elliptique. La proximité des axes optiques ne saurait être étrangère à ces anomalies; le fait suivant suffit à le prouver :

Imaginons qu'après avoir choisi, dans le plan médian $Y' = 0$, une direction quelconque dont nous désignerons par m' le coefficient angulaire, on cherche l'équation de l'orthogonal du cône de Malus relatif à cette direction. Pour le cas, notamment, où $f = g'$, on trouvera

$$Y'\left(\frac{X'}{Z'}\sqrt{2} + \frac{f\sqrt{2} - h'm'}{h'\sqrt{2} - fm'}\right) = 0.$$

Ce sont deux *plans* rectangulaires P et P', dont le premier n'est autre que le plan médian lui-même, $Y' = 0$. — Que si maintenant on remplace $\frac{X'}{Z'}$ par μ' dans l'équation du second, puis, qu'on y pose $\mu' = m'$, on retombera précisément (16) sur l'équation aux coefficients angulaires des *axes principaux* de Σ'_1. En y faisant, au contraire, $\mu' = -\frac{1}{m}$, on obtiendrait (15) celle de ses *axes optiques;* d'où il suit que, lorsque l'axe de polarisation

OA se trouve dans le voisinage de ces derniers axes, le plan P' tourne *brusquement* de 90° autour de la normale au plan P, ce qui confirme notre assertion ci-dessus.

Ajoutons, comme remarque, que les anomalies signalées n'auraient aucune raison d'être si l'on songeait à ériger en surface d'ondes réfléchies, ou bien la quadrique focale (I, n° 12)

$$f^2X^2 + g'^2Y^2 + h'^2Z^2 - 2g'h'YZ - 2h'fZX - 2fg'XY + 1 = 0,$$

ou bien l'hyperboloïde générateur conjugué

$$2fYZ + 2g'ZX + 2h'XY = 1,$$

par le motif que ces deux surfaces ont mêmes axes principaux que Σ'_1.

5° On a vu (n° 14) que lorsque $f = g'$, l'axe de polarisation maximum correspond à la racine positive de l'équation

$$\operatorname{tg}^2 I_p - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h'}{f}\operatorname{tg} I_p - 1 = 0,$$

et l'on peut démontrer que, pour $f \gtrless g'$, cet axe correspond, de même, à la racine positive de

$$\operatorname{tg}^2 I_p - \frac{h'\sqrt{2}}{f+g'}\operatorname{tg} I_p - 1 = 0.$$

D'autre part, on a, d'après Brewster, pour tous les cas possibles, $\operatorname{tg} I_p = n$, en désignant par n l'indice de réfraction de la surface réfléchissante. Il vient donc

$$n^2 - \frac{h'\sqrt{2}}{f+g'}n - 1 = 0,$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$n - \frac{1}{n} = \frac{h'\sqrt{2}}{f+g'} = \text{const.}$$

Réservant pour plus tard l'étude de cette constante remarquable, qui se rattache à la loi des sinus de Descartes, rappelons simplement ici que, pour que les axes optiques de Σ'_1 appartiennent au plan de profil, il faut avoir $f = g' > h'$. Or,

de la première des équations en I_p ci-dessus, on tire :

$$\operatorname{tg} 2 I_p = -2\sqrt{2}\,\frac{f}{h'};\quad \text{d'où, } \operatorname{tg} 2 I_p = \operatorname{tg} 2 I_{p_0} \frac{f}{h'},$$

l'angle I_{p_0} étant toujours l'angle de polarisation absolue. Mais $2 I_p$ et $2 I_{p_0}$ sont obtus; on a donc entre eux la relation $\frac{\pi}{4} < I_p < I_{p_0}$.

Il résulte de là que ce sont les substances dont l'indice est inférieur à 1,4142..... comme l'eau, par exemple, qui, seules, sont aptes à mettre les axes optiques de Σ'_1 dans le plan de profil et faire, par conséquent, coïncider un de ses plans principaux avec le plan d'incidence : particularité qui ne peut qu'accentuer le pouvoir polarisateur des substances en question, quelle que soit d'ailleurs, nous le répétons, la nature de ce pouvoir.

Inversement, les métaux, le diamant, etc., dont l'indice surpasse 2, écartent beaucoup (n° 5) les axes optiques de part et d'autre de ce même plan d'incidence et doivent, pour ce motif, polariser très peu. — On sait que l'expérience confirme toutes ces déductions.

Les considérations précédentes supposent, on le voit, que, à l'inverse de la surface de Fresnel, dont l'orientation est fixe, ainsi que nous l'avons déjà dit, la nouvelle surface s'oriente, pour chaque faisceau incident, de façon à identifier sensiblement son plan de profil avec le plan d'incidence lui-même. Or, ceci nous semble une conséquence naturelle de ce que, sur une surface polie homogène ou isotrope tout est identique ou très sensiblement tel à l'entour de chacun de ses points, et qu'il y a dès lors de chaque côté de ce plan d'incidence, quel qu'il soit, ou symétrie complète, ou, du moins, symétrie approchée. Soit donc que l'on ait $f = g'$ ou f voisin de g', ou même f très différent de g', circonstances qui ne produisent, après tout, comme on a pu l'observer (nos 6 et 8), que des variations relativement légères dans l'hyperbole médiane de profil, l'hypothèse de l'orientation *mobile* de la surface Σ'_1, bien loin d'infirmer la réalité de cette surface, nous semble, en raison de son accord constant avec les faits, fournir plutôt un argument de plus en faveur de cette réalité.

NOTE

Sur les principales formules de la théorie mécanique usuelle de la réflexion et de la réfraction.

—

Les paragraphes V, VI et VII nous paraissent contenir les traits généraux d'une théorie géométrique nouvelle de la polarisation rectiligne de la lumière et de la chaleur.

Que, dans son parallélisme à un plan fixe, cette polarisation soit, en effet, ou de front, ou de profil, ou de biais, nous la regardons, et non sans quelque fondement, comme un *clivage* des rayons lumineux ou calorifiques, réfléchis ou réfractés, fait parallèlement à la génératrice *double* de contact du plan tangent mené (suivant le cas) soit au cône de Malus respectif de ces rayons, soit à son orthogonal, soit à l'un quelconque des cônes moyens ou complémentaires qui s'y rapportent. Mais notre but n'est pas d'entamer ici une discussion sur cette matière. Arrêtons-nous plutôt à la théorie mécanique usuelle de cette même polarisation.

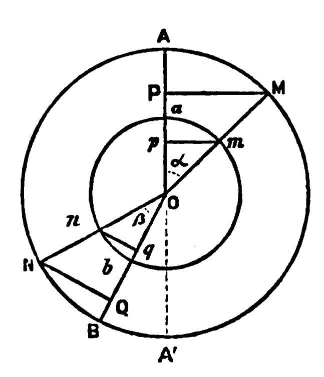
Sans oser dire d'une manière absolue, avec M. Wernicke (1), que cette théorie devra être tôt ou tard « modifiée profondément, dans les principes mêmes qui lui servent de base », nous avouerons volontiers qu'il nous a paru toujours assez étrange qu'à l'aide de quelques relations très élémentaires entre quatre segments projectifs pris, deux par deux, sur deux droites concourantes, on puisse former, même en les généralisant, les deux rapports essentiels qui figurent seuls, ou par eux-mêmes, ou par leurs combinaisons, dans les calculs de la théorie communément admise. Et cependant, c'est bien là ce qui a lieu, ainsi que nous allons le faire voir.

Soient, à cet effet, deux cercles concentriques, de rayons res-

(1) *Journal de physique d'Almeida*, etc., 1877, page 35.

pectifs R et ρ; soient aussi α et β (avec $\alpha > \beta$) les angles que deux rayons variables, OM et ON, font avec deux rayons fixes OA et OB. Projetons les premiers de ces rayons sur les seconds, et procédons de même pour les rayons Om, On qui correspondent au plus petit cercle.

Fig. 3.



1° Si l'on fait, pour abréger, $OP = H$, $Op = h$, $OQ = K$, $Oq = k$, il viendra d'abord

$$\frac{K}{h} = \frac{R \cos \beta}{\rho \cos \alpha}.$$

Supposons, après cela, que, entre R, ρ, α, β, existe la relation suivante :

$$(1) \qquad \frac{R}{\rho} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

laquelle, remarquons-le, assujettit le plus petit angle β à satisfaire à la condition $\sin \beta \leqq \frac{\rho}{R}$, ou aura alors

$$\frac{K}{h} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha};$$

d'où

$$(2) \qquad U = -\frac{K - h}{K + h} = -\frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

C'est le premier des deux rapports que nous voulions obtenir.

2° Un second couple de triangles rectangles nous donne pareillement

$$\frac{H}{k} = \frac{R \cos \alpha}{\rho \cos \beta},$$

ou bien, eu égard à la condition (1)

$$\frac{H}{k} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \beta \cos \beta},$$

d'où

$$\text{(3)} \qquad V = -\frac{H - k}{H + k} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

C'est le second rapport cherché.

Remarquons ici que, dans le cas où β excéderait sa valeur limite, U et V deviendraient imaginaires; mais on vérifie aisément que, sous la condition (1), le module de chacune de ces quantités complexes reste égal à l'unité.

Comme application des formules (2) et (3), supposons que OB soit tout d'abord ramené sur OA' et que cette dernière direction soit le prolongement de la *normale* OA à un plan réfléchissant. Si l'on fait $R = n$, $\rho = 1$. $\alpha = i$, $\beta = r$, on aura

$$u = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}, \qquad v = -\frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)}.$$

Ce sont bien là les deux rapports qui, pris tels quels ou sous les formes $\frac{u}{v}$, $1 - u^2$, $1 - v^2$, etc., figurent exclusivement dans les diverses formules de Fresnel relatives à la lumière polarisée.

Nous disons, exclusivement; car bien que les deux autres rapports

$$u' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r)}, \qquad v' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r) \cos(i - r)},$$

soient, en réalité, fournis *ex æquo* par les deux mêmes groupes d'équations que les deux premiers, ils restent *pratiquement*, comme on le sait, sans emploi efficace.

EMBOUCHURE DE LA GIRONDE

MODIFICATIONS

DANS

LES BANCS ET LES PASSES

D'APRÈS LES CARTES NAUTIQUES

PAR M. HAUTREUX

LIEUTENANT DE VAISSEAU, DIRECTEUR DES MOUVEMENTS DU PORT DE BORDEAUX EN RETRAITE.

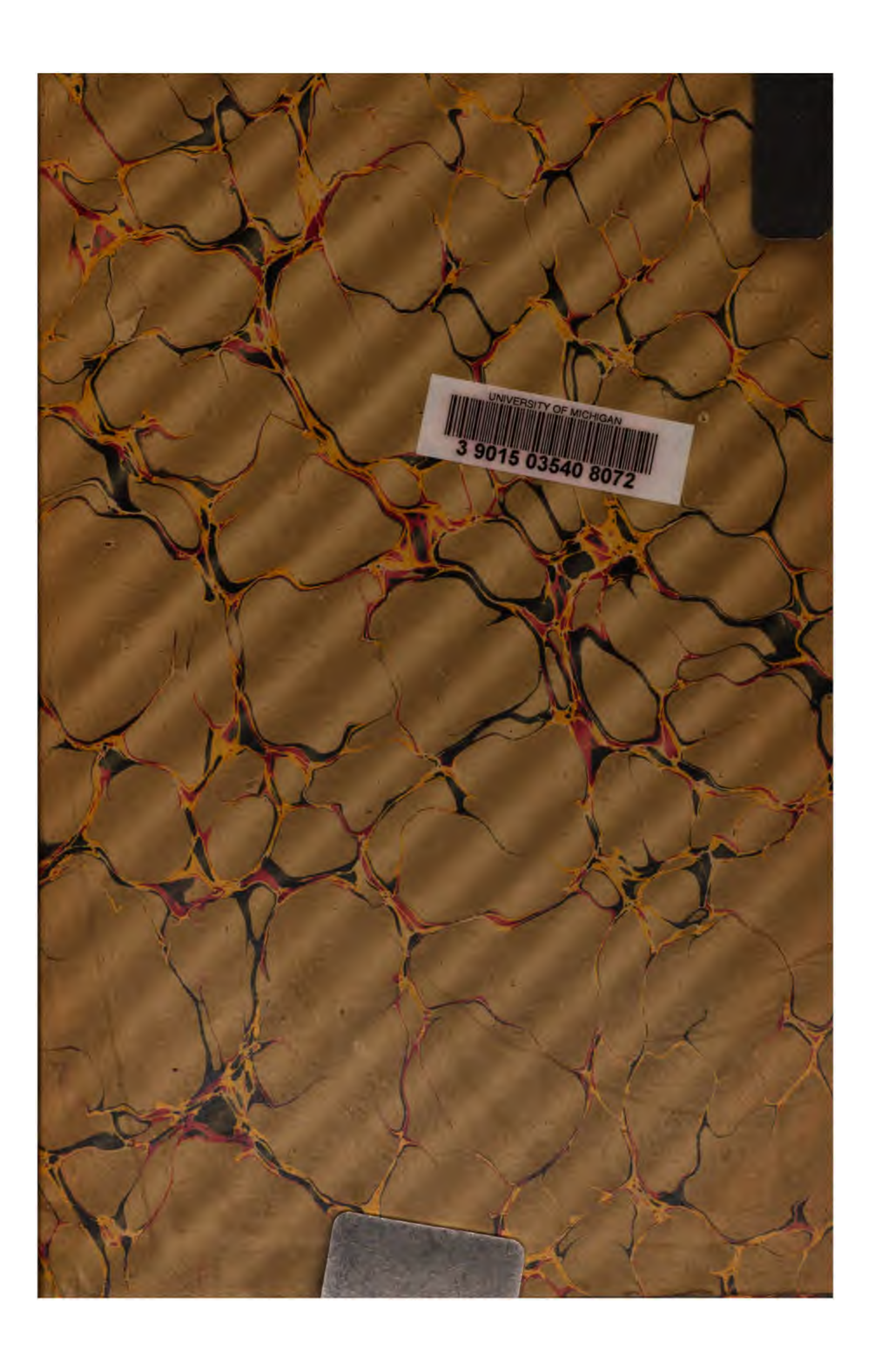
Nous présentons des copies ou des réductions des cartes anciennes les plus importantes que nous connaissions; toutes ne donnent pas un dessin hydrographique exact, mais étant faites pour l'usage des navigateurs, elles donnent des renseignements précis sur les dispositions des bancs et des passes, sur leur orientation et sur les profondeurs qu'on y rencontrait.

Analyse des cartes.

1590. — Carte tirée du *Miroir de la mer*, par J. Waghenaer. Les distances ne sont pas exactes; les dispositions des bancs et les profondeurs des passes de navigation sont très importantes. Elle contient un dessin approximatif de la tour de *Cordan;* à remarquer la situation du banc de *Movages*, qui est devenu plus tard la Mauvaise.

1677. — Réduction, d'après M. Manen, d'une carte des archives du ministère de la marine. Très exacte à tous les points de vue; aussi sur cette carte nous avons tracé le rivage actuel pour montrer les érosions de la côte du Médoc et les atterrissements de la Coubre et de la Palmyre qui se sont produits depuis cette époque.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03540 8072

